examenbundel.nl

examen bundel

Meer dan alleen oefenexamens

Nu bij je boek
mijn.examenbundel.nl
Online oefenen, video's en meer

2021|2022

vwo

Wiskunde A

ThiemeMeulenhoff

examenbundel.nl

examen bundel

Meer dan alleen oefenexamens

2021 | 2022

H.R. Goede

vwo

Wiskunde A

ThiemeMeulenhoff

mijn.examenbundel.nl

Slagen zonder examenstress doe je met Examenbundel, Samengevat, Examenidioom en Zeker Slagen! Alles voor je schoolexamens en je centrale examens in je boeken, maar ook online.

- Quickscan
- Antwoorden bij de oriëntatietoets
- Video's en andere leerbronnen
- Oefenexamens
- Overzicht van al je examenvakken
- En nog veel meer op Mijn Examenbundel!

Ga naar mijn.examenbundel.nl en log in op Mijn Examenbundel. Met deze code krijg je toegang tot heel veel (digitale) extra's die bij je bundel horen:

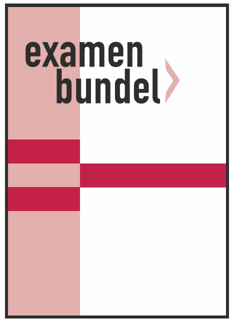
Deze code is uniek en door één persoon te gebruiken. Geldig tot 15 juli 2022.

#ikgazekerslagen

Voorwoord

Met deze **Examenbundel** bereid je je goed voor op het eindexamen en op de schoolexamens. Je oefent met echte examenopgaven. Als je niet weet hoe je een vraag aan moet pakken, raadpleeg dan de bijbehorende hint. In de uitwerkingen staan de antwoorden met een duidelijke uitleg. Zo weet je precies wat je goed en fout hebt gedaan.

Gebruik naast deze **Examenbundel** ook het boek **Samengevat** om te leren voor je examen. Hierin vind je een handige samenvatting van alle examenstof.



Oefenen met echte examens en duidelijke uitwerkingen

+

Overzichtelijke samenvatting van de examenstof

Wil je weten op welke datum het centraal examen is?
Ga naar examenbundel.nl/examenrooster voor het actuele examenrooster.
Of scan de QR-code:

Namens team **Examenbundel** heel veel succes!

Heb je een vraag of opmerking over deze **Examenbundel**?
Ga dan naar examenbundel.nl/contact.

Opmerking
De overheid stelt de regels op voor het examen. Bijvoorbeeld wat de examenonderwerpen zijn, welke hulpmiddelen je mag gebruiken en wanneer het examen is. De auteurs en uitgever hebben deze **Examenbundel** met grote zorg samengesteld. Soms veranderen de regels van de overheid echter of worden er nieuwe afspraken gemaakt over wat die regels betekenen. Raadpleeg daarom altijd je docent of onze website www.examenbundel.nl voor actuele informatie die voor jouw examen van belang is.

©ThiemeMeulenhoff

Inhoud

3 **Voorwoord**
7 **Stappenplan: hoe leer je met de Examenbundel?**
13 **Tips: hoe maak je examenopgaven bij wiskunde?**

Oriëntatietoets

17 Opgaven

Deel 1
Oefenen op onderwerp

1 Algebraïsche vaardigheden
27 Opgaven
32 Hints - uitwerkingen

2 Telproblemen
39 Opgaven
47 Hints - uitwerkingen

3 Lineaire, kwadratische en machtsfuncties
53 Opgaven
75 Hints - uitwerkingen

4a Exponentiële en logaritmische functies
88 Opgaven
108 Hints - uitwerkingen

4b De sinus
120 Opgaven
133 Hints - uitwerkingen

5 Rijen
141 Opgaven
146 Hints - uitwerkingen

6 Verandering en helling
151 Opgaven
159 Hints - uitwerkingen

7 Afgeleide functies
165 Opgaven
174 Hints - uitwerkingen

8 Onderzoeksopgaven
182 Opgaven
190 Hints - uitwerkingen

Deel 2a
Examens met uitwerkingen

Examen 2017-I
199 Opgaven
208 Hints - uitwerkingen

Examen 2017-II
215 Opgaven
224 Hints - uitwerkingen

Examen 2018-I
232 Opgaven
242 Hints - uitwerkingen

Examen 2018-II
249 Opgaven
257 Hints - uitwerkingen

Examen 2019-I
264 Opgaven
273 Hints - uitwerkingen

Examen 2019-II
279 Opgaven
289 Hints - uitwerkingen

Deel 2b
Examen zonder uitwerkingen

Examen 2021-I
299 Opgaven

Bijlagen

Cijferbepaling
Onderwerpregister
Lijst van formules*
Examenwerkwoorden
Afrondregels

*Op blz. 2 van het examen wordt een lijst van formules afgedrukt. Deze lijst staat achter in deze Examenbundel.

Stappenplan: hoe leer je met de Examenbundel?

Natuurlijk kun je de **Examenbundel** van voor naar achter doorwerken of er kriskras wat onderdelen uithalen om mee te oefenen, maar je kunt het ook systematischer aanpakken. Als je oefenen met de **Examenbundel** combineert met leren uit **Samengevat**, bereid je je optimaal voor op je examen.

Op de volgende pagina's vind je drie routes die laten zien hoe je kunt leren met de **Examenbundel**. Kies de route die past bij jouw manier van leren:

- Route 1: Ga je graag meteen aan de slag? Start met **oefenen per onderwerp**.
- Route 2: Wil je eerst weten waar je staat? Start met **de oriëntatietoets**.
- Route 3: Leer je liever eerst de theorie? Start met **leren per onderwerp**.

Wil je weten wat je leerstijl is?

Kies de route die bij jouw manier van leren past!

Lees ook de tips! Voorkom verrassingen tijdens je examen.

#ikgazekerslagen

Route 1

Ga je graag meteen aan de slag? Start met oefenen per onderwerp.

januari & februari

- Maak per week opgaven van een hoofdstuk in deel 1 van de Examenbundel.
- Kijk de opgaven na met de bijbehorende uitwerkingen.
  - Meer dan de helft goed. → Maak de oriëntatietoets.
  - De helft of minder goed.
    - Neem het bijbehorende hoofdstuk in Samengevat door.
    - Oefen met het onderwerpregister achter in de Examenbundel meer opgaven over dit onderwerp uit de verschillende examens.
    - Kijk die opgaven na.
      - Meer dan de helft goed. → Maak de oriëntatietoets.
      - De helft of minder goed.
        - Maak de opgaven van dat hoofdstuk uit deel 1 die je nog niet gemaakt had. Gebruik de hints.

maart

- Maak de oriëntatietoets.
- Bereken je score met de uitwerkingen op mijn.examenbundel.nl.
  - Voldoende.
  - Onvoldoende.
- Bestudeer Samengevat over de onderwerpen die minder goed gingen.
- Oefen opgaven uit deel 1 van de Examenbundel en via het onderwerpregister uit de verschillende examens over het betreffende onderwerp. Gebruik de hints!

april

- Maak een heel examen uit deel 2a van de Examenbundel.
- Kijk het examen na met de bijbehorende uitwerkingen.
  - Tevreden met het resultaat.
  - Niet tevreden met het resultaat.
    - Kijk met behulp van het onderwerpregister welke onderdelen nog niet goed gaan en waar voor jouw gevoel wel winst is te behalen. Je hoeft niet alles goed te doen!
    - Bestudeer Samengevat en maak via het onderwerpregister van de Examenbundel een aantal opgaven over dat onderwerp uit deel 1 en 2a tot je tevreden bent met het resultaat.
- Blijf oefenen met deel 2a zodat je met vertrouwen het examen in gaat.

#geenexamenstress

Route 2

Wil je eerst weten waar je staat? Start met de oriëntatietoets.

januari

- Maak de oriëntatietoets in de Examenbundel.
- Bereken je score met de uitwerkingen op mijn.examenbundel.nl.
  - Voldoende.
  - Onvoldoende.
    - Kijk welke onderwerpen uit deel 1 van de Examenbundel nog niet goed gingen.

februari

- Bestudeer elk hoofdstuk in Samengevat.

maart

- Maak opgaven per onderwerp uit deel 1 van de Examenbundel.
- Kijk de opgaven na met de bijbehorende uitwerkingen.
  - Meer dan de helft goed.
  - De helft of minder goed.
    - Oefen met het onderwerpregister achter in de Examenbundel meer opgaven over dit onderwerp uit de verschillende examens.
    - Kijk die opgaven na.
      - Meer dan de helft goed.
      - De helft of minder goed.
        - Maak de opgaven van dat hoofdstuk uit deel 1 die je nog niet gemaakt had. Gebruik de hints.

april

- Maak een heel examen uit deel 2a van de Examenbundel.

april

- Kijk het examen na met de bijbehorende uitwerkingen.
  - Tevreden met het resultaat.
  - Niet tevreden met het resultaat.
    - Kijk met behulp van het onderwerpregister welke onderdelen nog niet goed gaan en waar voor jouw gevoel wel winst is te behalen. Je hoeft niet alles goed te doen!
    - Bestudeer Samengevat en maak via het onderwerpregister van de Examenbundel een aantal opgaven over dat onderwerp uit deel 1 en 2a tot je tevreden bent met het resultaat.
- Blijf oefenen met deel 2a zodat je met vertrouwen het examen in gaat.

#geenexamenstress

Route 3

Leer je liever eerst de theorie? Start met leren per onderwerp.

#

januari & februari

Bestudeer per week een hoofdstuk uit Samengevat.

maart

Maak de oriëntatietoets van de Examenbundel.

Bereken je score met de uitwerkingen op mijn.examenbundel.nl.

- Voldoende.
- Onvoldoende.
  - Kijk welke onderwerpen uit deel 1 van de Examenbundel nog niet goed gingen.
  - Maak de opgaven uit deel 1 over die onderwerpen.
  - Kijk die opgaven na.
    - Meer dan de helft goed.
    - De helft of minder goed.
      - Oefen met het onderwerpregister achter in de Examenbundel meer opgaven over dit onderwerp uit de verschillende examens.

april

Maak een heel examen uit deel 2a van de Examenbundel.

Kijk het examen na met de bijbehorende uitwerkingen.

- Tevreden met het resultaat.
- Niet tevreden met het resultaat.
  - Kijk met behulp van het onderwerpregister welke onderdelen nog niet goed gaan en waar voor jouw gevoel wel winst is te behalen. Je hoeft niet alles goed te doen!
  - Bestudeer Samengevat en maak via het onderwerpregister van de Examenbundel een aantal opgaven over dat onderwerp uit deel 1 en 2a tot je tevreden bent met het resultaat.

Blijf oefenen met deel 2a zodat je met vertrouwen het examen in gaat.

#geenexamenstress

©ThiemeMeulenhoff

Tips: hoe maak je examenopgaven bij wiskunde?

Bij het op de juiste manier oplossen van een probleem doorloop je in het algemeen drie stappen: de voorbereiding, de uitvoering en een controle.

Voorbereiding

- Kijk eerst vluchtig alle opgaven door en begin met de opgaven die je vertrouwd voorkomen.
- Ga na hoeveel tijd beschikbaar is per opgave.
- Lees de tekst van de gekozen opgave rustig en nauwkeurig. Onderstreep of markeer hierbij aanwijzingen, begrippen, formules, getallen e.d. die van belang kunnen zijn. Deze informatie is dan bij het beantwoorden van de vragen snel terug te vinden.
- Lees elke vraag nauwkeurig, maak een schets en ga na welke informatie je nodig denkt te hebben om de vraag te kunnen beantwoorden.
- Bepaal welke tussenstappen je bij de beantwoording van de vraag zult moeten maken. Deze worden bepaald door het ‘gat’ dat er zit tussen de gegevens en het gevraagde. Je kunt daarbij zowel van de gegevens als van het gevraagde uitgaan.
- Begin pas aan de uitvoering, wanneer je de aanpak van het vraagstuk overziet.

Uitvoering

- Reserveer op je papier voor elke opgave voldoende ruimte. Je werk wordt daardoor overzichtelijker en je kunt je antwoord makkelijker aanvullen.
- Schrijf alle tussenstappen overzichtelijk op, zodat zichtbaar wordt hoe je tot je antwoord bent gekomen.
- Indien om uitleg wordt gevraagd, mag die niet ontbreken.
- Schrijf bij twijfel altijd iets op (behalve als je zelf al kunt beoordelen dat je antwoord nergens op slaat).

Controle

- Lees de vraag nog eens over. Is hij volledig beantwoord?
- Vind je het gevonden antwoord zinnig (klopt bv. de orde van grootte)? Zo niet, probeer je denk- of rekenfout op te sporen of maak daarover tenminste een opmerking.
- Is de juiste eenheid vermeld?
- Is de afronding van een verkregen waarde in overeenstemming met de vraagstelling? Let op het juiste aantal cijfers achter de komma.

!

©ThiemeMeulenhoff

Hoe zou je het nu al doen op een examen? De oriëntatietoets geeft je een eerste indruk. De antwoorden vind je op mijn.examenbundel.nl.

Oriëntatietoets

Oriëntatietoets

Lawaaitrauma

Als je langdurig harde geluiden hoort, kunnen klachten ontstaan, zoals stress of gehoorbeschadiging. Men spreekt dan van een lawaaitrauma.

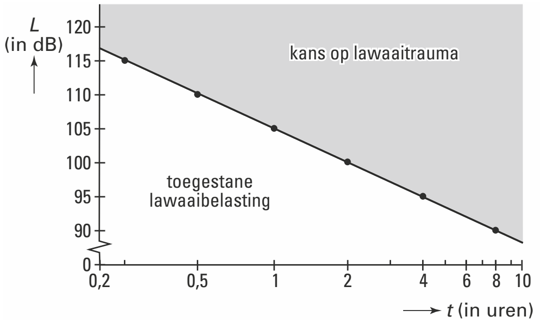
In Noorwegen bleek het aantal militairen met een lawaaitrauma tussen 1 januari 1982 en 1 januari 1988 te zijn verdubbeld.
Op 1 januari 1982 hadden 4500 van hen een aantoonbaar lawaaitrauma.
Neem aan dat het aantal militairen met zo'n trauma in de periode 1982–1988 exponentieel toenam.

5p **1** Bereken het aantal militairen dat op 1 januari 1985 een lawaaitrauma had. Rond je antwoord af op honderdtallen.

In de Verenigde Staten heeft men rond 1990 vastgesteld dat geluidssterktes van meer dan 90 dB (decibel) waaraan iemand langer dan 8 uur per dag (een werkdag) wordt blootgesteld, een lawaaitrauma kunnen opleveren.
Ter bescherming van de werknemers is daarom de volgende norm ingevoerd:
– bij een voortdurende geluidssterkte van 90 dB bedraagt de maximale werktijd 8 uur;
– bij elke toename van de geluidssterkte met 5 dB moet de maximale werktijd gehalveerd worden.

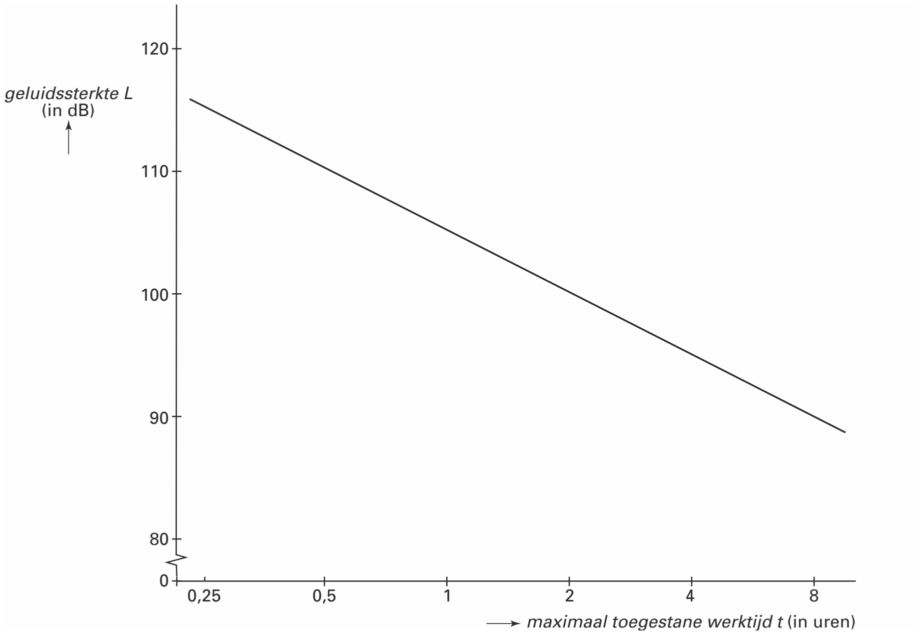
In het assenstelsel van figuur 2 is een lijn getekend. Deze lijn geeft het verband weer tussen de geluidssterkte en de maximaal toegestane werktijd, zoals die gebruikt wordt voor industrielawaai in de VS. Op de horizontale as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt.
L is de geluidssterkte in dB en *t* is de maximaal toegestane werktijd in uren.

figuur 1



De Europese norm is sinds enkele jaren strenger dan de norm van de VS:
– bij een voortdurende geluidssterkte van 80 dB bedraagt de maximale werktijd 8 uur;
– bij elke toename van de geluidssterkte met 3 dB moet de maximale werktijd gehalveerd worden.

figuur 2



In figuur 2 is de lijn van figuur 1, behorend bij de norm van de VS, nogmaals in een assenstelsel getekend. Ook hier is op de horizontale as een logaritmische schaalverdeling gebruikt.

3p **2** Teken in dit assenstelsel de lijn die bij de Europese norm hoort.

De formule die hoort bij de in figuur 1 getekende lijn is $L = -16{,}6 \cdot \log(t) + 105$.

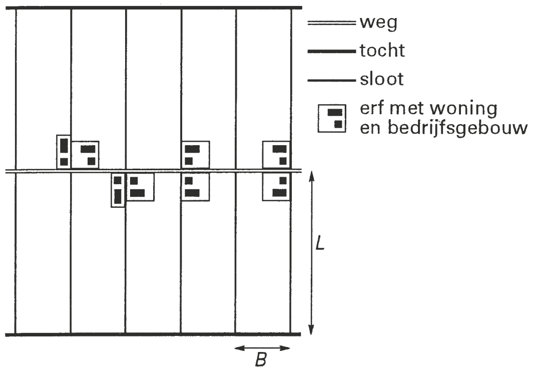
In Amerika en Europa staan twee fabrieken met voor de werknemers precies dezelfde geluidssterkte. In de Amerikaanse fabriek mag men vanwege de geluidssterkte maximaal 6 uur per dag werken.

5p **3** Onderzoek hoeveel tijd per dag men in de Europese fabriek maximaal zou mogen werken.

Kavels

In polders wordt het overtollige water afgevoerd via sloten. Deze monden uit in *tochten*, dat zijn bredere sloten die het water verder afvoeren. Bij de inrichting van de landbouwgebieden in de IJsselmeerpolders heeft men een regelmatig patroon aangehouden. De sloten staan loodrecht op de tochten. Midden tussen twee tochten loopt steeds een weg. Hierdoor wordt het land verdeeld in rechthoeken. Zo'n rechthoek noemt men een *kavel*. Een landbouwbedrijf beslaat doorgaans één of meer kavels. In figuur 1 zijn tien kavels te zien.

figuur 1



Bij het ontwerpen van de inrichting van deze polders heeft men zich de vraag gesteld: *'Wat zijn gunstige afmetingen voor een kavel?'* Grote kavels vergen minder investeringen en onderhoudskosten voor wegen, sloten en tochten. Bovendien ontstaan dan efficiënt te bewerken akkers. Echter, een grote kavelbreedte levert hoge drainagekosten op en een grote kavellengte veroorzaakt hoge kosten voor het vervoer van mensen en materieel. Onder bepaalde aannamen kwamen de ontwerpers tot het volgende verband tussen de lengte (L) en de breedte (B) van een kavel, en de totale kosten (K) per hectare:

$$K = \frac{18547}{L} + 56{,}6L + \frac{5279}{B} + 90{,}8B$$

K in euro's
L en B in hectometers, 1 hectometer (hm) = 100 meter

In Oostelijk Flevoland is gekozen voor standaardkavels van 30 hectare (= 30 hm^2). Zo'n kavel zou bijvoorbeeld 6 hm lang en 5 hm breed kunnen zijn, of 10 hm lang en 3 hm breed. In het tweede geval zijn de totale kosten per hectare minder dan in het eerste geval.

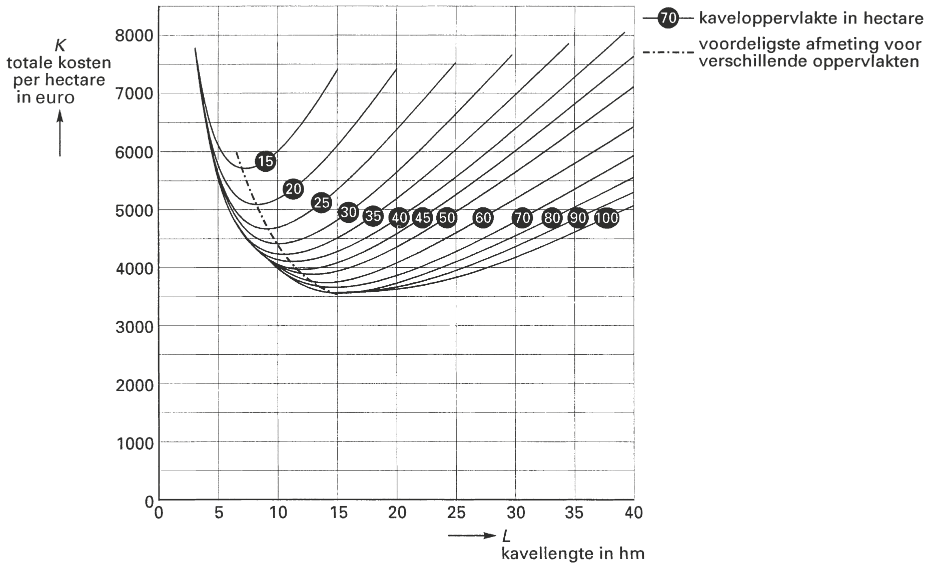
3p **4** Bereken hoeveel procent de totale kosten per hectare in het tweede geval minder zijn dan die in het eerste geval.

4p **5** Leid uit de gegeven formule af dat voor kavels van 30 hectare bij benadering geldt:

$$K = \frac{21271}{L} + 232{,}6L$$

In figuur 2 is voor een aantal kaveloppervlakten het verband weergegeven tussen de kavellengte *L* en de totale kosten per hectare *K*.

figuur 2



Voor kavels van 30 hectare is in figuur 2 af te lezen dat *K* minimaal is bij een kavellengte van iets minder dan 10 hm. Uitgaande van de formule van vraag 5 kan deze kavellengte met behulp van differentiëren worden berekend.

5p **6** Bereken met behulp van differentiëren deze kavellengte. Rond het antwoord af op gehele meters.

Iemand suggereert het volgende als vuistregel:
als je bij een gegeven oppervlakte de lengte drie keer zo groot kiest als de breedte dan zijn de totale kosten per hectare vrijwel minimaal.
Uit het bovenstaande is af te leiden dat dit klopt voor kavels van 30 hectare.

5p **7** Bereken welke waarde van *L* deze vuistregel bij kavels van 20 hectare oplevert en ga na of bij deze waarde de totale kosten per hectare volgens figuur 2 inderdaad vrijwel minimaal zijn.

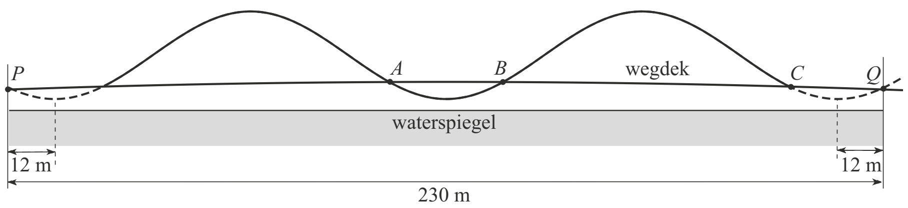
©ThiemeMeulenhoff

Brug

Op de foto zie je de Enneüs Heermabrug in Amsterdam. De brug bestaat uit golvende bogen: een verticaal geplaatste middenboog en twee schuin geplaatste buitenste bogen. Het wegdek is met hangstangen opgehangen aan deze bogen.

In onderstaande figuur 1 zie je een model van deze brug. De golvende middenboog is met een sinusoïde weergegeven, de waterspiegel met een rechte lijn en het wegdek met een heel licht gebogen lijn.

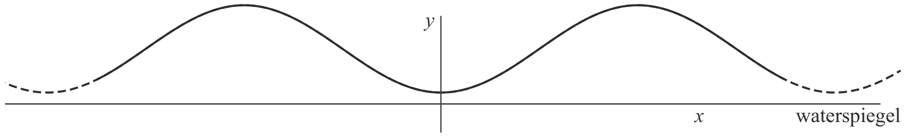
figuur 1



In figuur 1 zijn tevens enkele maten aangegeven: de brug is in totaal 230 meter lang. De sinusoïde is links en rechts met een stippellijn voortgezet: op 12 m afstand van de uiteinden van de brug bevindt zich een laagste punt. De hoogste punten van de boog bevinden zich op 26 m boven de waterspiegel en het laagste punt op 3 meter.

Voor de sinusoïde van figuur 1 kunnen we een formule opstellen van de vorm
$y = a + b\sin(c(x - d))$. Als we in de figuur als *x*-as de waterspiegel nemen en de *y*-as door het midden van de brug laten gaan (zie figuur 2), wordt deze formule:
$y = 14{,}5 + 11{,}5\sin(0{,}061(x - 25{,}75))$ met *x* en *y* in meters.

figuur 2



4p **8** Licht toe hoe je met behulp van de gegeven maten de waarden voor *a*, *b*, *c* en *d* in deze formule kunt berekenen.

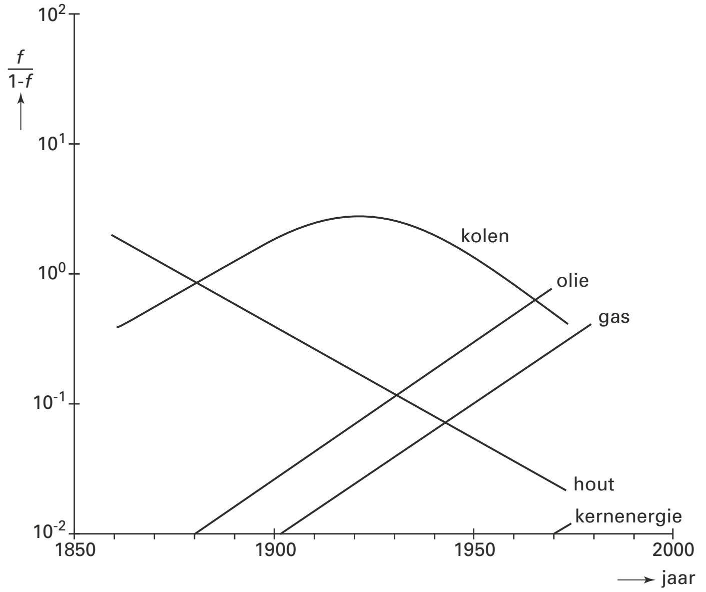
©ThiemeMeulenhoff

We kunnen het assenstelsel ook op een andere manier aanbrengen. Voor de volgende vraag gaan we uit van een assenstelsel waarbij de *y*-as door het punt *P* in figuur 1 gaat en de *x*-as de waterspiegel blijft.
In dat geval ziet de formule voor de sinusoïde van figuur 1 er anders uit.

3p **9** Geef een mogelijke formule voor deze situatie. Licht je antwoord toe.

Energiebronnen

Hout was vroeger de belangrijkste energiebron. In het begin van de negentiende eeuw werd de rol van de belangrijkste energiebron overgenomen door kolen.
De laatste jaren is het aandeel van olie en gas in het totale energieverbruik steeds groter geworden.
In het boek 'Energie, een economisch perspectief ' besteden de schrijvers Th. v.d. Klundert en H. Peer aandacht aan de ontwikkeling van energiebronnen. Zij gebruiken daarbij de variabele *f* voor het aandeel van een energiebron zoals dat zich in de loop van de tijd ontwikkeld heeft ten opzichte van het totale energieverbruik. Dit aandeel *f* is een getal waarvoor geldt dat $0 \leq f \leq 1$. Hierbij betekent $f = 0$ dat deze energiebron helemaal niet gebruikt wordt en $f = 1$ dat uitsluitend van deze energiebron gebruik gemaakt wordt.
In het boek staat een afbeelding zoals in de figuur hieronder. Door niet *f* maar $\frac{f}{1-f}$ uit te zetten en bovendien op de verticale as een aangepaste schaalverdeling te gebruiken, worden de meeste grafieken rechte lijnen.



3p **10** In welk jaar leverde hout 50% van het totale energieverbruik? Licht je antwoord toe.

Met de figuur hebben de auteurs informatie willen geven over het belang van verschillende energiebronnen door de jaren heen. Opvallend is dat daarbij niet *f* maar $\frac{f}{1-f}$ wordt gebruikt.

Dat kan omdat bij elke waarde van $\frac{f}{1-f}$ precies één waarde van *f* hoort. Immers, als *f* toeneemt van 0 tot 1, dan stijgt $\frac{f}{1-f}$ voortdurend.

4p **11** Toon die laatste bewering aan met behulp van de afgeleide van $\frac{f}{1-f}$.

Persoonlijke lening

Iemand heeft bij een bank een persoonlijke lening afgesloten van € 80 000,–.
Voor rente en aflossing betaalt hij aan het eind van elke maand een vast bedrag, namelijk € 720,–.
De bank brengt hem 0,7% rente per maand over het restant van de lening in rekening.

L_0 is het beginbedrag: € 80 000,–. L_t is het restant van de lening direct na het einde van de t^e maand. L_t berekent men als volgt:
Eerst wordt het restant aan het eind van de vorige maand (L_{t-1}) vermeerderd met de verschuldigde rente en daarna wordt de € 720,– er van af getrokken.
Er wordt bij alle bedragen gerekend in euro's.
Het model dat hier bij hoort, ziet er dus als volgt uit:

$L_t = 1{,}007 \cdot L_{t-1} - 720$
$L_0 = 80\,000$

In de tabel kun je voor de eerste paar maanden zien hoe groot het restant van de lening is aan het eind van elke maand.

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
L_t	80000,-	79840,-	79678,88	79516,63	79353,25

3p **12** Bereken L_6.

Het maandbedrag van € 720,– bestaat voor een deel uit de verschuldigde rente en voor een deel uit aflossing. Met behulp van de tabel kunnen we bijvoorbeeld nagaan dat aan het einde van de eerste maand € 160,– van de lening is afgelost. De maandelijkse aflossing aan het einde van de t^e maand geven we aan met A_t.
Dus we hebben de volgende formule:

$A_t = 720 - 0{,}007 \cdot L_{t-1}$

Door deze aflossing wordt het restant van de lening elke maand kleiner.
In formulevorm:

$L_t = L_{t-1} - A_t$

Met behulp van de tabel kun je nagaan dat $A_1 = 160$.
Doordat het restant van de lening, en dus ook de verschuldigde rente, steeds kleiner wordt, wordt de aflossing steeds groter. Dit kan beschreven worden met de volgende formule:

$A_{t+1} = 1{,}007 \cdot A_t$

4p **13** Toon met behulp van het voorgaande aan dat deze formule juist is.

Op een bepaald moment is het restant van de lening plus de rente daarover € 720,– of minder. Dit vormt dan het laatste maandbedrag, en daarmee is de lening afgelost.

3p **14** Toon aan dat de lening na 216 maanden is afgelost.

Quadominos

Het spel Quadominos bestaat uit vierkante stenen. Zie foto 1. Op elke steen staan vier cijfers, één cijfer bij elke hoek. Dit cijfer kan zijn een 0, 1, 2, 3, 4 of 5.
Doel van het spel is zoveel mogelijk stenen passend aan te leggen. In foto 2 zie je daar een voorbeeld van.

foto 1

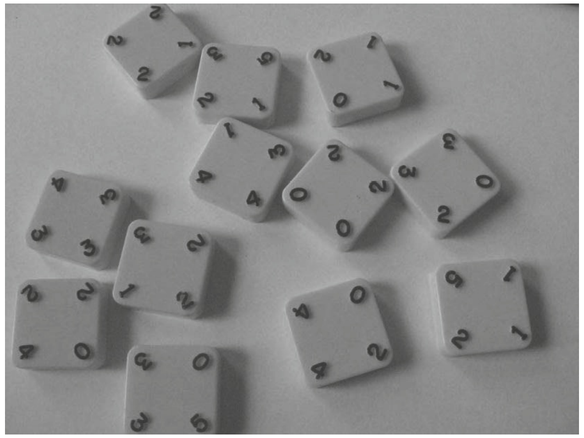
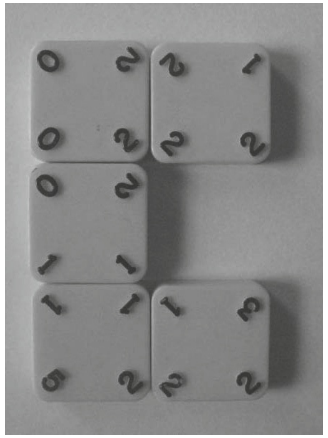


foto 2



Alle stenen zijn verschillend. Alle mogelijke combinaties van cijfers komen voor, behalve één: er is geen steen met de cijfers 0, 2, 4 en 5.
Je kunt de stenen in vijf soorten verdelen:
– stenen met vier dezelfde cijfers, bijvoorbeeld 3-3-3-3
– stenen met precies drie dezelfde cijfers, bijvoorbeeld 3-3-3-4 in foto 1 (links)
– stenen met twee keer twee dezelfde cijfers, bijvoorbeeld 0-0-2-2 in foto 1
– stenen met twee dezelfde en daarnaast twee verschillende cijfers, bijvoorbeeld 1-1-0-2 in foto 1 (boven)
– stenen met vier verschillende cijfers, bijvoorbeeld 1-2-3-5 in foto 1 (boven).

Van elke combinatie van vier toegestane cijfers zit er in het spel slechts één steen. Er zit bijvoorbeeld dus maar precies één steen in met de cijfers 1-1-0-2.

8p **15** Onderzoek hoeveel stenen er in totaal zijn bij het spel Quadominos.

©ThiemeMeulenhoff

Examenopgaven per onderwerp met hints om je op weg te helpen en uitleg bij de antwoorden. Ook handig bij de voorbereiding op je schoolexamens!

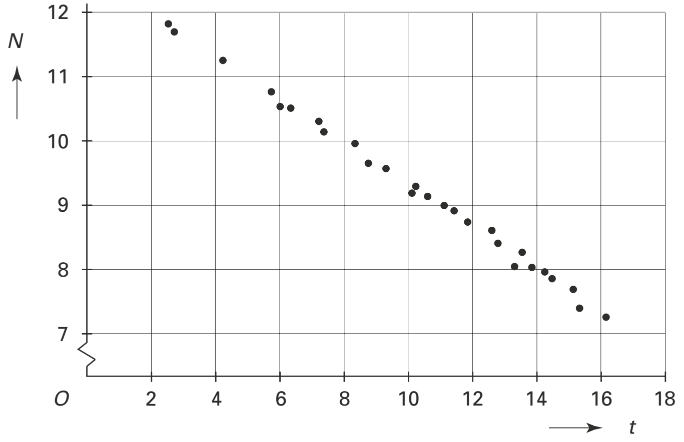
Deel 1 Oefenen op onderwerp

1 Algebraïsche vaardigheden

Lineair

1 Stel de vergelijking op van de lijn door de punten (–3, 14) en (5, 2).

2 In de grafiek hieronder is een aantal meetgegevens weergegeven. De punten liggen bij benadering op een rechte lijn.



Stel de vergelijking op van de lijn die zo goed mogelijk bij de getekende puntengrafiek hoort.

3 Er bestaat een lineair verband tussen x en y in de volgende tabel:

x	70	74	80
y	244	258,8	281

Stel een formule op voor y.

4 Bereken exact de oplossing van: $\frac{x-3}{4} + 2 = 3x$

©ThiemeMeulenhoff

5 Het CBS (Centraal Bureau voor de Statistiek) besteedt elk jaar aandacht aan de verdeling van de inkomens van huishoudens in Nederland. In de tabel is voor het jaar 2004 weergegeven hoeveel huishoudens in een bepaalde inkomensklasse zaten.

besteedbaar inkomen in euro's	aantal huishoudens in duizendtallen
0 – 10 000	490
10 000 – 20 000	2057
20 000 – 30 000	1777
30 000 – 40 000	1309
40 000 – 50 000	687
50 000 – 70 000	460
meer dan 70 000	197

Met behulp van lineair interpoleren kun je een schatting maken van het percentage huishoudens met een besteedbaar inkomen van ten hoogste 27 000 euro.
Schat dat percentage huishoudens met behulp van lineair interpoleren.

6 Het aantal leerlingen op het Pythagoraslyceum groeit al langere tijd tamelijk constant. De gegevens over het aantal leerlingen staan in de tabel hieronder.

jaartal	2000	2005	2010	2015
aantal leerlingen	1230	1284	1340	1395

a Bereken met behulp van lineair interpoleren het aantal leerlingen in 2008.
b Voorspel met behulp van lineair extrapoleren het aantal leerlingen in 2023.

Haakjes

7 Schrijf zonder haakjes: $A = \frac{1}{3} \cdot 2x \cdot (9 - 2x)$.

8 Gegeven is de formule $V = 0{,}5(x - 7)(x + 2) + 12$.
Herschrijf de formule in de vorm $V = ax^2 + bx + c$.

9 Schrijf zonder haakjes: $K = 3x\,(x + 5)^2 - 8x$.

Formules omwerken

10 Schrijf de formule $S = \sqrt{\frac{4}{9} \cdot L \cdot M}$ in de vorm $S = a \cdot L^b \cdot M^c$.

11 Gegeven is de formule $12 = 40 \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{R}}$.
Herschrijf de formule zo dat je een formule krijgt waarin P wordt uitgedrukt in R.

12 De formule $y = 8 \cdot \left(\frac{100}{x}\right)^{0{,}25}$ kan worden geschreven in de vorm $y = a \cdot x^b$.
Bereken a en b.

 ©ThiemeMeulenhoff

13 Schrijf $y = 0{,}6^{2t}$ in de vorm $y = e^{at}$.

14 De grafiek van $g(x) = {}^2\log(8x)$ kan worden verkregen door een verschuiving van de grafiek van de standaardfunctie $f(x) = {}^2\log(x)$.
Bereken om welke verschuiving het gaat.

15 De formule $\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0{,}7 = 0$ kan worden geschreven als $y = a \cdot x$.
Bereken a.

16 De formule $N = \ln\left(\frac{10}{12 - t}\right)$ kan worden herleid tot $t = a + b \cdot c^{-N}$.
Bereken a, b en c.

17 Er is een verband tussen de vraag naar tarwe en de prijs van tarwe. In het boek 'Wiskunde voor economie' wordt daarvoor de volgende prijs-vraag-formule vermeld:
$p = 10\sqrt{-23q + 3800}$
Hierin is p de prijs in euro per 1000 kg en q de vraag in 1000 kg per maand.
Op een bepaald moment wordt de tarwe verhandeld voor 232 euro per 1000 kg.
Bereken, uitgaande van de formule, met hoeveel kg per maand de vraag afneemt als de prijs toeneemt van 232 euro per 1000 kg naar 238 euro per 1000 kg. Rond je antwoord af op tientallen kilo's.

18 De formule $G = 0{,}037 \cdot t^{2{,}21}$ kan worden herleid tot $\ln(G) = a + b \cdot \ln(t)$.
Bereken a en b.

19 Schrijf M als functie van V als gegeven is dat $V = {}^3\log(4 - 2M)$.

20 Schrijf de functie $f(x) = 0{,}07 \cdot 3^{2(x+4)}$ in de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

21 De formule $P = 14 \cdot \frac{a}{G} - 0{,}8u$ kan worden herleid tot $u = \frac{1{,}25 \cdot (14 \cdot a - PG)}{G}$.
Laat deze herleiding zien.

22 Gegeven is de formule $R = 100 - \frac{100}{1 + \frac{W}{V}}$. Herleid deze formule tot $R = \frac{\dots}{V + W}$.

23 Laat zien dat uit $\frac{f}{1 - f} = x$ volgt $f = \frac{x}{x + 1}$.

Substitutie

24 Gegeven zijn de formules $S = \frac{1000}{R^3}$ en $R = \sqrt{100 + x^2}$.
Toon dan aan dat S geschreven kan worden in de vorm $S = 1000 \cdot (100 + x^2)^{-1{,}5}$

25 Laat zien dat de formule $q = 250v - 1{,}5625v^2$ afgeleid kan worden uit de formules $k = 250\left(1 - \frac{v}{160}\right)$ en $q = v \cdot k$.

©ThiemeMeulenhoff

26 Gegeven zijn de formules $\log(L) = 3{,}896 + 0{,}734 \cdot \log(K)$ en $\log(G) = -13{,}431 + 3{,}396 \cdot \log(L)$.
Stel een formule op waarbij *G* wordt uitgedrukt in *K*.

27 Gegeven zijn de formules $L \cdot B = 20$ en $K = 5{,}6L + \frac{4}{B} + 7{,}2B$.

Stel een formule op waarin *K* wordt uitgedrukt in *L*.

28 Zwaardere dieren hebben een zwaarder skelet, ook in verhouding.
Zo weegt het skelet van een veldmuis (20 gram) nog geen gram (= 5%), en dat van een 4000 kg zware olifant ongeveer 1000 kg (= 25%). Het verband tussen lichaamsgewicht en skeletgewicht van landzoogdieren kan benaderd worden met de formule:

$S(M) = 0{,}0343 \cdot M^{1{,}083}$

met *S* het skeletgewicht in gram en *M* het lichaamsgewicht in gram.
- a Laat zien hoeveel keer zo groot het skeletgewicht wordt (volgens deze formule) wanneer het lichaamsgewicht 10 maal zo groot wordt.
- b Maak een formule waarmee je op grond van het lichaamsgewicht *M* meteen kunt berekenen hoeveel procent het skeletgewicht bedraagt bij deze dieren.

29 Gegeven is de formule $G(a) = 10 \cdot \log\left(\frac{a}{5}\right) + 130$.

Hoe verandert de waarde van *G* als *a* tweemaal zo groot wordt?

Evenredig

30 Gegeven is de volgende tabel:

x	7	9,2	11
y	21,7	28,52	34,1

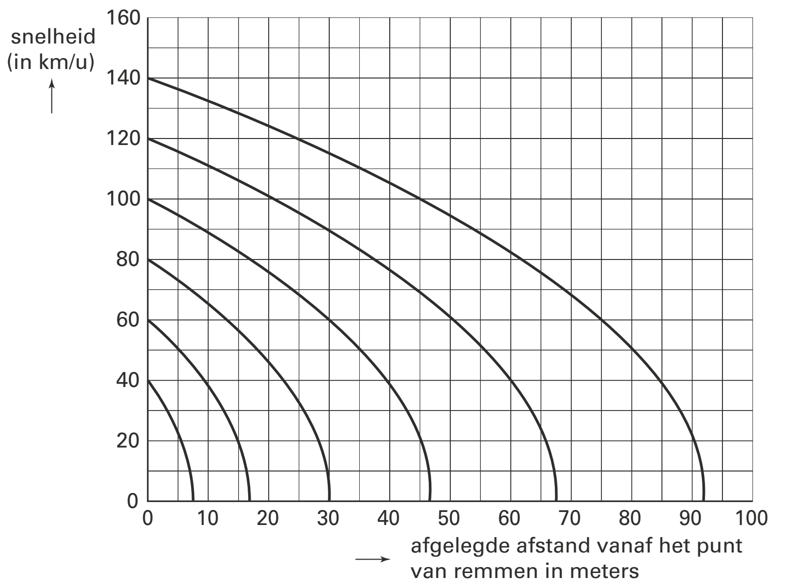
Laat zien dat *x* en *y* recht evenredig zijn en stel hierbij een formule op.

31 Herman fietst elke dag langs dezelfde weg naar school.
Voor een natuurkundeproject heeft Herman een aantal dagen nauwkeurig bijgehouden hoe lang hij over deze fietstocht deed en wat zijn gemiddelde snelheid was.
In de tabel zie je een paar van zijn resultaten.

gemiddelde snelheid (km/uur)	19,8	17,5	20,3
fietstijd (min:sec)	21:13	24:00	20:41

De natuurkundeleraar van Herman beweert dat de gemiddelde snelheid en de gefietste tijd omgekeerd evenredig zijn.
Laat zien dat de meetresultaten in de tabel inderdaad in overeenstemming zijn met een omgekeerd evenredig verband.

32 Wanneer een automobilist op de rem trapt, zal de snelheid van de auto afnemen.
In de figuur is voor beginsnelheden van 40, 60, 80, 100, 120 en 140 km per uur het verband weergegeven tussen de snelheid van een auto en de afgelegde afstand vanaf het punt waarop begonnen is met remmen.



In de figuur kun je aflezen dat de auto bij een beginsnelheid van 40 km per uur na ongeveer 7,5 m remmen tot stilstand is gekomen. We zeggen dat bij een beginsnelheid van 40 km per uur de remweg 7,5 m bedraagt.
Ook voor grotere beginsnelheden kun je de remweg uit de figuur aflezen. Iemand beweert dat de remweg van de auto evenredig is met het kwadraat van de beginsnelheid. Dat betekent dat het verband tussen de beginsnelheid en de remweg wordt gegeven door de volgende formule:

$remweg = c \cdot v_0^2$

Hierin is v_0 de beginsnelheid in km per uur. De remweg is in meter. Het getal *c* is een constante.
Lees in de figuur bij de zes genoemde beginsnelheden de remweg af en laat met behulp daarvan zien dat de remweg inderdaad evenredig is met het kwadraat van de beginsnelheid. Bepaal ook de waarde van de constante *c* in drie decimalen nauwkeurig.

33 Karpers zijn zoetwatervissen die meer dan een meter lang kunnen worden.
Voor volwassen karpers met een lengte tussen 10 en 94 cm geldt:

G is evenredig met $L^{3{,}13}$

waarin *G* het gewicht van de karper is in gram en *L* de lengte in cm.
Bereken hoeveel keer zo zwaar een volwassen karper van 94 cm is in vergelijking met een volwassen karper van 10 cm. Rond je antwoord af op honderdtallen.

Hints bij hoofdstuk 1

1 Een vergelijking heeft de vorm $y = ax + b$, waarin a de helling of richtingscoëfficiënt is.

2 Teken een lijn en lees punten af. Verder als de vorige vraag.

3 Onderzoek of de helling tussen de punten (70, 244) en (74; 258,8) gelijk is aan die tussen (74; 258,8) en (80, 281). Gebruik deze helling als richtingscoëfficiënt.

4 $\frac{A}{B} = C \Leftrightarrow A = B \cdot C$ (als $B \neq 0$)

5 27 000 ligt in de klasse 20 000 – 30 000. Een deel van de 1777 duizend huishoudens in deze klasse zal minder dan 27 000 euro te besteden hebben.

6 Bereken de toename van het aantal leerlingen per jaar.

7 Haakjes uitwerken.

8 $(x+p)(x+q) = x^2 + (p+q)x + pq$

9 $(x+5)^2 = (x+5)(x+5)$ eerst uitwerken.

10 Gebruik de rekenregels $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$, $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ en $\sqrt{A} = A^{0,5}$.

11 $\sqrt[3]{A} = B \Rightarrow A = B^3$

12 $\left(\frac{p}{q}\right)^c = \frac{p^c}{q^c}$

13 $g^{p \cdot q} = (g^p)^q$ en $g^a = b \Leftrightarrow a = {}^g\log(b)$

14 ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$

15 Herleiden, kwadrateren, herleiden en worteltrekken.

16 $a = \ln(b) \Leftrightarrow e^a = b$ en $\frac{1}{g^a} = g^{-a}$

17 p invullen. Kwadrateren om q te berekenen.

18 ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$ en ${}^g\log(a^p) = p \cdot {}^g\log(a)$

19 $g^a = b \Leftrightarrow a = {}^g\log(b)$

20 $g^{p \cdot q} = (g^p)^q$ en $g^{p+q} = g^p \cdot g^q$

21 Eén breuk maken: $\frac{p}{q} + r = \frac{p + qr}{q}$

22 Vermenigvuldig zowel de teller als de noemer van de samengestelde breuk met V.

23 $\frac{f}{1-f} = x \Rightarrow f = x(1-f)$ daarna haakjes uitwerken en f vrijmaken.

24 Vul de formule van R in in die van S.

25 Vul de formule van k in in die van q.

26 Substitutie, gevolgd door ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$ en ${}^g\log(a^p) = p \cdot {}^g\log(a)$.

27 Maak B vrij en vul de gevonden formule in in de formule van K.

28a Vervang M in de formule door $10M$ en probeer de oorspronkelijke formule terug te vinden.

28b $percentage = \frac{S}{M} \cdot 100\%$.

29 Vervang a in de formule door $2a$ en probeer de oorspronkelijke formule terug te vinden.

30 A en B zijn recht evenredig als $A = c \cdot B$ of $\frac{A}{B} = c$, waarin c een constante is.

31 A en B zijn omgekeerd evenredig als $A \cdot B = c$ of $A = \frac{c}{B}$, waarin c een constante is.

32 Lees bij elke grafiek de *beginsnelheid en de remweg* af en ga na of c steeds gelijk is.

33 Omdat er om de verhouding van twee gewichten wordt gevraagd, is het niet nodig om de evenredigheidsconstante te kennen.

©ThiemeMeulenhoff
©ThiemeMeulenhoff

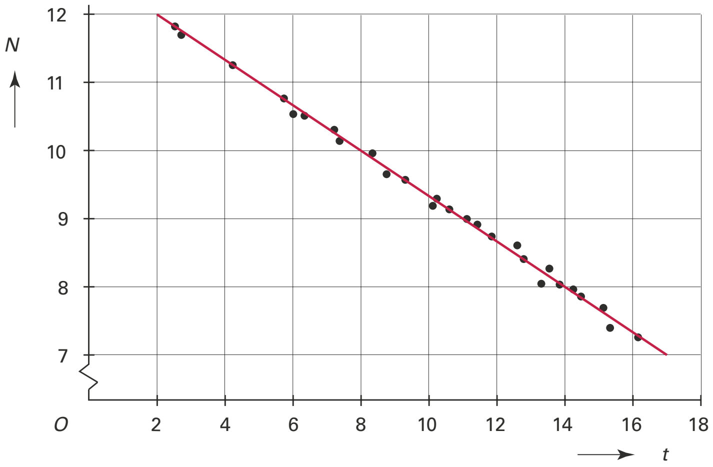
Uitwerkingen bij hoofdstuk 1

Lineair

1 Een vergelijking heeft de vorm $y = ax + b$, waarin a de helling of richtingscoëfficiënt is.

$a = \frac{\text{verandering van } y}{\text{verandering van } x} = \frac{2-14}{5--3} = -1{,}5$. Deze waarde van a samen met de coördinaten van (5, 2) invullen geeft: $2 = -1{,}5 \cdot 5 + b \Leftrightarrow b = 9{,}5$.
De gevraagde vergelijking is $y = -1{,}5x + 9{,}5$.

2 De lijn door de punten (2, 12) en (17, 7) volgt de puntengrafiek tamelijk goed.



De bijbehorende vergelijking heeft de vorm $N = a \cdot t + b$.

$a = \frac{\text{verandering van } y}{\text{verandering van } x} = \frac{7-12}{17-2} = \frac{-5}{15} = -\frac{1}{3}$ is de richtingscoëfficiënt.

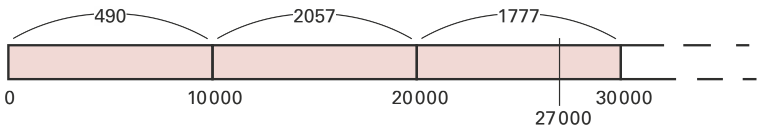
Deze waarde en de coördinaten van (2, 12) invullen geeft: $12 = -\frac{1}{3} \cdot 2 + b \Leftrightarrow b = 12\frac{2}{3}$

De gevraagde vergelijking is: $N = -\frac{1}{3}t + 12\frac{2}{3}$

3 De gemiddelde helling tussen 70 en 74 is $\frac{258{,}8-244}{74-70} = 3{,}7$ en de gemiddelde helling tussen 74 en 80 is $\frac{281-258{,}8}{80-74} = 3{,}7$ dus de richtingscoëfficiënt van het lineaire verband is 3,7 $\Rightarrow$ de formule heeft de vorm $y = 3{,}7x + b$.
Vul nu $x = 70$ en $y = 244$ in om b te berekenen: $244 = 3{,}7 \cdot 70 + b \Leftrightarrow b = -15$
De gevraagde formule is dus $y = 3{,}7x - 15$.

4 $\frac{x-3}{4} = 3x-2 \Leftrightarrow x-3 = 4(3x-2) \Leftrightarrow x-3 = 12x-8 \Leftrightarrow -11x = -5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{11}$

5 Het totaal aantal huishoudens in 2004 is 490 + 2057 + ... + 197 = 6977 duizend.
De klassen 0 – 10 000 en 10 000 – 20 000 liggen beide geheel onder de grens 27 000 euro.



27 000 ligt in de klasse 20 000 – 30 000. Als de huishoudens gelijkelijk over deze klasse verdeeld zijn, zal 70% van deze 1777 duizend huishoudens een besteedbaar inkomen van ten hoogste 27 000 euro hebben. Dat zijn er 0,7 × 1777 = 1243,9 duizend.
Het aantal huishoudens in 2004 met een inkomen van ten hoogste 27 000 euro is 490 + 2057 + 1243,9 = 3790,9 duizend en dat is $\frac{3790{,}9}{6977} \cdot 100 \approx 54{,}3\%$ van het totaal aantal huishoudens.

6a De toename tussen 2000 en 2005 is 54 leerlingen, de toename tussen 2005 en 2010 is 56 leerlingen en die tussen 2010 en 2015 is 55 leerlingen. Gemiddeld komen er per 5 jaar 55 leerlingen bij, dat is gemiddeld 11 per jaar.
2008 is 3 jaar na 2005 dus in 2008 waren er 1284 + 3 · 11 = 1317 leerlingen.

b 2023 is 8 jaar na 2015 dus als deze groei zich voortzet zullen er in 2023 naar verwachting 1395 + 8 · 11 = 1483 leerlingen op deze school zitten.

Haakjes

7 $A = \frac{1}{3} \cdot 2x \cdot (9-2x) = \frac{2}{3}x \cdot (9-2x) = 6x - \frac{4}{3}x^2$

8 $V = 0{,}5(x^2 - 5x - 14) + 12 = 0{,}5x^2 - 2{,}5x - 7 + 12 = 0{,}5x^2 - 2{,}5x + 5$

9 $K = 3x(x+5)^2 - 8x = 3x(x+5)(x+5) - 8x = 3x(x^2 + 10x + 25) - 8x =$
$3x^3 + 30x^2 + 75x - 8x = 3x^3 + 30x^2 + 67x$

Formules omwerken

10 $S = \sqrt{\frac{4}{9} \cdot L \cdot M} = \sqrt{\frac{4}{9}} \cdot \sqrt{L} \cdot \sqrt{M} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} \cdot L^{0,5} \cdot M^{0,5} = \frac{2}{3} \cdot L^{0,5} \cdot M^{0,5}$

11 $12 = 40 \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{R}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{P}{R}} = \frac{12}{40} = 0{,}3 \Leftrightarrow \frac{P}{R} = 0{,}3^3 = 0{,}027 \Leftrightarrow P = 0{,}027R$.

12 $y = 8 \cdot \left(\frac{100}{x}\right)^{0,25} = 8 \cdot \frac{100^{0,25}}{x^{0,25}} = 8 \cdot 100^{0,25} \cdot x^{-0,25}$ dus $a = 8 \cdot 100^{0,25} \approx 25{,}3$ en $b = -0{,}25$

13 $0{,}6^{2t} = e^{at} \Leftrightarrow (0{,}6^2)^t = (e^a)^t \Leftrightarrow 0{,}36 = e^a \Leftrightarrow a = \ln(0{,}36)$
dus $y = 0{,}6^{2t} = e^{\ln(0,36) \cdot t}$ of afgerond $y = e^{-1,02 \cdot t}$

14 $g(x) = {}^2\log(8x) = {}^2\log(8) + {}^2\log(x) = 3 + f(x)$ dus door de grafiek van f over 3 eenheden omhoog te verschuiven ontstaat de grafiek van g.

15 $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0{,}7 = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0{,}7$ en nu kwadrateren:

$\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 = 0{,}7^2 \Leftrightarrow \frac{y^2}{x^2+y^2} = 0{,}49 \Rightarrow y^2 = 0{,}49x^2 + 0{,}49y^2 \Leftrightarrow 0{,}51y^2 = 0{,}49x^2 \Leftrightarrow$

$y^2 = \frac{0{,}49}{0{,}51} \cdot x^2 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{0{,}49}{0{,}51}} \cdot x$ dus $a = \sqrt{\frac{0{,}49}{0{,}51}}$ of $a \approx 0{,}98$

16 $N = \ln\left(\frac{10}{12-t}\right) \Leftrightarrow \frac{10}{12-t} = e^N \Rightarrow \frac{10}{e^N} = 12 - t \Leftrightarrow t = 12 - \frac{10}{e^N} = 12 - 10 \cdot e^{-N}$
dus $a = 12$, $b = -10$ en $c = e$.

17 Prijs $p = 232$ invullen geeft $232 = 10\sqrt{-23q+3800} \Leftrightarrow 23{,}2 = \sqrt{-23q+3800}$
Kwadrateren: $538{,}24 = -23q + 3800 \Leftrightarrow 23q = 3261{,}76 \Leftrightarrow q = 141{,}8...$
Prijs $p = 238$ invullen geeft $238 = 10\sqrt{-23q+3800} \Leftrightarrow 23{,}8 = \sqrt{-23q+3800}$
Kwadrateren: $566{,}44 = -23q + 3800 \Leftrightarrow 23q = 3233{,}56 \Leftrightarrow q = 140{,}5...$
Het verschil in vraag is 141,8... – 140,5... = 1,2260... keer 1000 kg, dus afgerond op tientallen kilo's scheelt het 1230 kg.

18 $G = 0{,}037 \cdot t^{2{,}21} \Rightarrow \ln(G) = \ln(0{,}037 \cdot t^{2{,}21}) = \ln(0{,}037) + \ln(t^{2{,}21}) = \ln(0{,}037) + 2{,}21 \cdot \ln(t)$
dus $a = \ln(0{,}037) \approx -3{,}30$ en $b = 2{,}21$.

19 $V = {}^3\log(4-2M) \Leftrightarrow 4 - 2M = 3^V \Leftrightarrow -2M = 3^V - 4 \Leftrightarrow M = -\frac{1}{2} \cdot 3^V + 2$

20 $f(x) = 0{,}07 \cdot 3^{2(x+4)} = 0{,}07 \cdot 3^{2x+8} = 0{,}07 \cdot (3^2)^x \cdot 3^8 = 0{,}07 \cdot (9)^x \cdot 3^8 = 459{,}27 \cdot 9^x$

21 $P = 14 \cdot \frac{a}{G} - 0{,}8u \Leftrightarrow P + 0{,}8u = 14 \cdot \frac{a}{G} \Leftrightarrow 0{,}8u = \frac{14 \cdot a}{G} - P$

$0{,}8u = \frac{14 \cdot a}{G} - \frac{PG}{G} \Leftrightarrow 0{,}8u = \frac{14 \cdot a - PG}{G} \Leftrightarrow u = \frac{1}{0{,}8} \cdot \left(\frac{14 \cdot a - PG}{G}\right) \Leftrightarrow$

$u = 1{,}25 \cdot \left(\frac{14 \cdot a - PG}{G}\right) = \frac{1{,}25 \cdot (14 \cdot a - PG)}{G}$

22 Teller en noemer van de breuk vermenigvuldigen we met V:
$R = 100 - \frac{100}{1+\frac{W}{V}} \cdot \frac{V}{V} = 100 - \frac{100V}{\left(1+\frac{W}{V}\right) \cdot V} = \frac{100}{1} - \frac{100V}{V+W}$ breuken gelijknamig

maken: $R = \frac{100(V+W)}{V+W} - \frac{100V}{V+W} = \frac{100V + 100W - 100V}{V+W} \Leftrightarrow R = \frac{100W}{V+W}$

23 $\frac{f}{1-f} = x \Rightarrow f = x(1-f) \Leftrightarrow f = x - xf \Leftrightarrow f + xf = x \Leftrightarrow f(1+x) = x \Rightarrow f = \frac{x}{1+x}$

Substitutie

24 Uit $S = \frac{1000}{R^3}$ en $R = \sqrt{100+x^2}$:

volgt: $S = \frac{1000}{\left(\sqrt{100+x^2}\right)^3} = \frac{1000}{\left((100+x^2)^{0{,}5}\right)^3} = \frac{1000}{(100+x^2)^{1{,}5}} = 1000 \cdot (100+x^2)^{-1{,}5}$

25 Uit $k = 250\left(1 - \frac{v}{160}\right)$ en $q = v \cdot k$ volgt:

$q = v \cdot 250\left(1 - \frac{v}{160}\right) = 250v - \frac{250v^2}{160} = 250v - 1{,}5625v^2$

26 $\log(G) = -13{,}431 + 3{,}396 \cdot (3{,}896 + 0{,}734 \cdot \log(K)) = -13{,}431 + 13{,}23... + 2{,}49... \cdot \log(K) \Leftrightarrow$
$\log(G) = -0{,}20... + 2{,}49... \cdot \log(K) \Leftrightarrow \log(G) = \log(10^{-0{,}20...}) + \log(K^{2{,}49...}) \Leftrightarrow$
$\log(G) = \log(10^{-0{,}20...} \cdot K^{2{,}49...}) \Leftrightarrow G = 10^{-0{,}20...} \cdot K^{2{,}49...}$
En afgerond wordt dat $G \approx 0{,}63 \cdot K^{2{,}49}$.

27 Uit $L \cdot B = 20$ volgt $B = \frac{20}{L}$ en samen met $K = 5{,}6L + \frac{4}{B} + 7{,}2B$ geeft dit:

$K = 5{,}6L + \frac{4}{\left(\frac{20}{L}\right)} + 7{,}2 \cdot \frac{20}{L} = 5{,}6L + 4 \cdot \left(\frac{L}{20}\right) + \frac{144}{L} = 5{,}6L + 0{,}2L + \frac{144}{L} \Rightarrow$

$K = 5{,}8L + \frac{144}{L}$

28a Vervang M in de formule door $10M$. Dit geeft:
$S(10M) = 0{,}0343 \cdot (10M)^{1{,}083} = 0{,}0343 \cdot 10^{1{,}083} \cdot M^{1{,}083} = 10^{1{,}083} \cdot 0{,}0343 \cdot M^{1{,}083} =$
$10^{1{,}083} \cdot S(M) \approx 12{,}1 \cdot S(M)$ dus als het lichaamsgewicht 10 keer zo groot wordt, wordt het skeletgewicht 12,1 keer zo groot.

b De formule die het percentage P van het skeletgewicht ten opzichte van het lichaamsgewicht geeft, luidt:

$P = \frac{S}{M} \cdot 100\% \Leftrightarrow P = \frac{0{,}0343 \cdot M^{1{,}083}}{M} \cdot 100 = 0{,}0343 \cdot M^{1{,}083-1} \cdot 100$

dus de formule is $P = 3{,}43 \cdot M^{0{,}083}$.

29 Vervang a in de formule door $2a$. Dit geeft:
$G(2a) = 10 \cdot \log\left(\frac{2a}{5}\right) + 130 = 10 \cdot \log\left(2 \cdot \frac{a}{5}\right) + 130 = 10 \cdot \left(\log(2) + \log\left(\frac{a}{5}\right)\right) + 130 =$

$10 \cdot \log(2) + 10 \cdot \log\left(\frac{a}{5}\right) + 130 = 10 \cdot \log(2) + G(a) \approx 3 + G(a)$ dus als a tweemaal zo groot wordt, wordt de uitkomst van G ongeveer 3 hoger.

Evenredig

30 $\frac{21{,}7}{7} = 3{,}1$ en $\frac{28{,}52}{9{,}2} = 3{,}1$ en ook $\frac{34{,}1}{11} = 3{,}1$ dus het verband tussen x en y is recht evenredig. Een formule hierbij is $y = 3{,}1 \cdot x$.

31 Er is sprake van een omgekeerd evenredig verband als *snelheid* · *fietstijd* = constant.
De tijdseenheden moeten wel gelijk gemaakt worden, bijvoorbeeld overal seconden.
Een snelheid 19,8 km/uur is gelijk aan 19,8 / 3600 km/sec en fietstijd 21 min + 13 sec = 21 · 60 + 13 sec.
$(19{,}8/3600) \cdot (21 \cdot 60 + 13) = 7{,}0015$
$(17{,}5/3600) \cdot (24 \cdot 60) = 7$
$(20{,}3/3600) \cdot (20 \cdot 60 + 41) \approx 6{,}9979$
In alle drie gevallen is de uitkomst van *snelheid* · *fietstijd* ongeveer 7 dus constant.
Er is inderdaad sprake van een omgekeerd evenredig verband.
De constante 7 is in dit geval de lengte van de fietsroute van huis naar school in km.

32 Als de remweg evenredig is met het kwadraat van de beginsnelheid v_0 moet gelden

$$remweg = c \cdot v_0^2 \Leftrightarrow \frac{remweg}{(beginsnelheid)^2} = constant$$

De remweg bij de zes genoemde beginsnelheden lezen we af in de figuur en daarna berekenen we met de rekenmachine telkens $\frac{remweg}{(beginsnelheid)^2}$:

beginsnelheid	40	60	80	100	120	140
remweg	7,5	17	30	47	68	92
$\frac{remweg}{(beginsnelheid)^2}$	0,004688	0,004722	0,004688	0,0047	0,004722	0,004694

De zes waarden voor $\frac{remweg}{(beginsnelheid)^2}$ zijn alle ongeveer 0,0047, dus de remweg is inderdaad evenredig met het kwadraat van de beginsnelheid: $remweg = c \cdot v_0^2$.
Afgerond op drie decimalen is de constante c gelijk aan 0,005.

33 Voor volwassen karpers is G evenredig met $L^{3,13}$ dus een formule die dit verband weergeeft heeft de vorm $G = c \cdot L^{3,13}$ waarin c een evenredigheidsconstante is.
$L = 10$ invullen: $G = c \cdot 10^{3,13} = c \cdot 1348,9...$
$L = 94$ invullen: $G = c \cdot 94^{3,13} = c \cdot 1\,499\,305,6...$

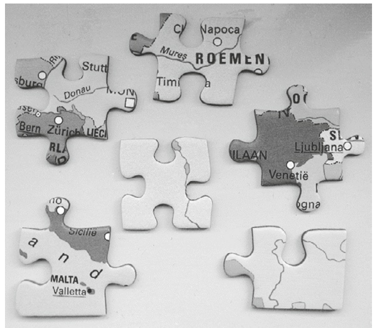
De verhouding tussen beide gewichten is $\frac{c \cdot 94^{3,13}}{c \cdot 10^{3,13}} = \frac{1\,499\,305,6...}{1348,9...} = 1111,4...$

Een karper van 94 cm is ongeveer 1100 keer zo zwaar als een karper van 10 cm.

2 Telproblemen

Puzzelstukjes

Op de foto hiernaast zie je enkele puzzelstukjes van een legpuzzel van Europa.
Als je aan een puzzel begint, kan je besluiten om de puzzelstukjes eerst op soort te selecteren: de hoekstukjes, de randstukjes en alle andere stukjes.



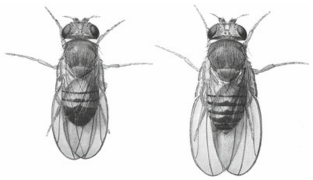
Deze soorten kunnen verschillende vormen hebben.
Om te onderzoeken hoeveel verschillende vormen er eigenlijk zijn, voeren we een aantal regels in:

- We beschouwen de puzzelstukjes als vierkantjes;
- Een zijde kan recht zijn of met een inkeping of met een uitstulping;
- Bij een hoekstukje heb je twee aan elkaar grenzende rechte zijden (zie het stukje rechtsonder op de foto), bij een randstukje is één zijde recht (zie het stukje linksonder op de foto) en bij de overige puzzelstukjes is er geen enkele zijde recht;
- Twee stukjes hebben een gelijke vorm als ze door draaiing (over een kwart-, halve of driekwartslag) in elkaar overgaan. De twee puzzelstukjes linksboven en midden boven op de foto hebben beide twee inkepingen en twee uitstulpingen maar zijn toch verschillend van vorm;
- Stukjes die alleen door op de kop te leggen en niet door draaiing in elkaar over kunnen gaan, noemen we wel verschillend van vorm aangezien er op de achterkant niet de kaart van Europa staat.

1 Bereken hoeveel verschillende vormen er in het totaal volgens bovenstaande regels zijn.

Kruisingsexperiment

Bij praktische opdrachten voor het vak biologie over kruisingen wordt vaak gebruik gemaakt van fruitvliegjes (Drosophila melanogaster). Deze fruitvliegjes zijn namelijk makkelijk te kweken en de ontwikkeling van ei tot fruitvliegje duurt maar negen dagen. Men kan dus in zeer korte tijd veel generaties kweken.



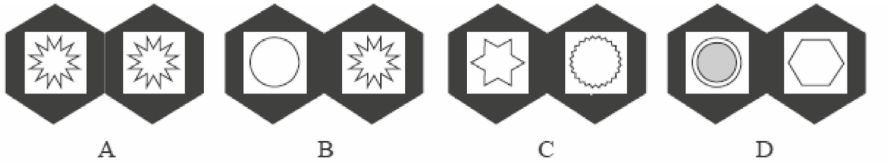
Een andere reden dat vaak gebruik gemaakt wordt van fruitvliegjes is dat een aantal eigenschappen goed zichtbaar zijn: oogkleur (**r**ood/**z**wart), vleugelvorm (**k**ort/**l**ang) en huidskleur (**d**onker/**g**eel). Een fruitvliegje met zwarte oogkleur, korte vleugels en een gele huidskleur wordt getypeerd als: **z-k-g**. Op basis van deze eigenschappen zijn er acht typen mannetjes en acht typen vrouwtjes.

Voor een kruisingsexperiment moeten vier fruitvliegjes, twee mannelijke en twee vrouwelijke, in een kweekruimte worden geplaatst. Hierbij gelden twee eisen:
– De twee mannelijke fruitvliegjes mogen niet van hetzelfde type zijn.
– De twee vrouwelijke fruitvliegjes mogen niet van hetzelfde type zijn.

2 Bereken hoeveel verschillende samenstellingen in de kweekruimte mogelijk zijn.

Genius

Genius is een bordspel voor 1 tot en met 4 spelers. Tijdens het spel moeten de spelers tegels op het speelveld plaatsen. Een tegel heeft de vorm van twee zeshoeken die met een zijde aan elkaar vast zitten. Deze tegels zitten in een zak. Op elke tegel staan twee symbolen. Dat kunnen twee dezelfde symbolen of twee verschillende symbolen zijn. Er zijn zes verschillende symbolen: 12-puntige ster, cirkel, 6-puntige ster, zon, gevulde cirkel en zeshoek. In de figuur zijn vier tegels afgebeeld.



Elke mogelijke tegel met twee dezelfde symbolen komt 5 keer voor. Tegel A in de figuur komt dus 5 keer voor.
Elke mogelijke tegel met twee verschillende symbolen komt 6 keer voor.
Dus bijvoorbeeld de tegel met een cirkel en een 12-puntige ster (tegel B in de figuur) komt 6 keer voor.

3 Bereken het totale aantal tegels dat bij Genius wordt gebruikt.

Edwin en zijn vrienden zijn helemaal bezeten van dit voor hen nieuwe spel. Zij denken erover om een toernooi te houden. Zij laten daarbij steeds twee spelers tegen elkaar spelen. Aan deze competitie doen 16 spelers mee.

De spelers worden verdeeld over 4 poules van 4 spelers. In elke poule speelt elke speler één keer tegen elke andere speler. Na afloop van de poulewedstrijden gaan de beste twee spelers van elke poule door naar de kwartfinale. In de kwartfinale speelt elke speler maar tegen één andere speler.
De winnaars van deze wedstrijden gaan door naar de halve finale.
In deze halve finale speelt weer elke speler één wedstrijd.
De winnaars spelen tenslotte de finale, die ook over één wedstrijd wordt beslist.

4 Bereken het aantal wedstrijden dat tijdens dit toernooi gespeeld moet worden.

Tricoda

Het familiespel Tricoda is uitgeroepen tot Speelgoed van het jaar 2010.
Het spel Tricoda bestaat uit 28 stenen. Het cijfer 1 komt één keer voor, het cijfer 2 twee keer, het cijfer 3 drie keer en zo verder tot en met het cijfer 7, dat zeven keer voorkomt. Zie de figuur.

1
2 2
3 3 3
4 4 4 4
5 5 5 5 5
6 6 6 6 6 6
7 7 7 7 7 7 7

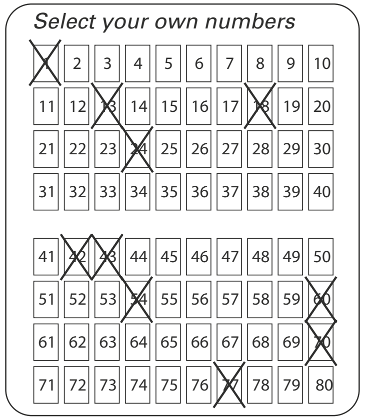
Elke speler krijgt 3 stenen, die op een standaard worden geplaatst, waarbij de volgorde niet van belang is. De 3 stenen vormen zo een cijfertrio. De stenen staan zo op de standaards, dat elke speler wel de cijfertrio's van de andere spelers ziet, maar zijn eigen cijfertrio niet. Zie foto.

Om het spel te winnen moet je, met behulp van vragenkaartjes, beredeneren welke drie getallen op je eigen standaard staan.

5 Bereken het aantal mogelijke verschillende cijfertrio's dat een speler bij de start van het spel kan krijgen.

Keno

In de Verenigde Staten kun je op veel plaatsen het kansspel Keno spelen.
De spelregels en de te winnen prijzen zijn niet overal precies hetzelfde. We kijken in deze opgave naar één bepaalde vorm waarin het spel gespeeld kan worden.
Een lot kost 1 dollar. Op het lot staan de getallen 1 tot en met 80. Om mee te spelen moet je 10 van deze 80 getallen aankruisen. Dat kan op verschillende manieren.
In de figuur zie je daar een voorbeeld van.



6 Bereken hoeveel mogelijkheden er zijn om 10 verschillende getallen op het lot te kiezen.

Bij de trekking worden door een trekkingsmachine willekeurig 22 getallen gekozen uit de getallen 1 tot en met 80. Nu gaat het erom, hoeveel van de 10 aangekruiste getallen goed zijn. Dat wil zeggen, hoeveel er bij de 22 getallen uit de trekkingsmachine zitten.
Volgens Fred is het aantal mogelijkheden om op een lot 2 getallen aan te kruisen die goed zijn, meer dan 10 keer zo groot is als het aantal mogelijkheden waarbij geen enkel aangekruist getal goed is.

7 Onderzoek of Fred gelijk heeft.

ISO-code

In alle havens wordt met containers gewerkt. Daarom moet elke container herkenbaar zijn. Hiervoor is een code ontwikkeld. Elke code is geregistreerd bij de ISO (International Organization for Standardization).
Elke container krijgt een nummer bestaande uit 4 letters, 6 cijfers en 1 controlecijfer.
Bijvoorbeeld EMCU 315579 1.
Het containernummer bestaat uit 3 delen:
– de eerste drie letters zijn vrij te kiezen uit het alfabet, de vierde is de U van unit;
– de eerste 6 cijfers vormen het serienummer;
– het laatste cijfer is een controlecijfer, dat op een ingewikkelde manier rechtstreeks afhangt van de eerste zes cijfers en dus vastligt.

8 Bereken het aantal verschillende containernummers.

Bridge

Een set speelkaarten bestaat uit 52 kaarten, verdeeld in de soorten schoppen (♠), harten (♥), ruiten (♦) en klaveren (♣). Iedere soort bevat 13 kaarten, met de opdruk 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, boer, vrouw, heer of aas.

Het kaartspel bridge wordt gespeeld door vier spelers, die ieder 13 kaarten krijgen. Zie de figuur.
We gaan er bij deze opgave van uit dat het delen van de kaarten op aselecte wijze gebeurt. Dat betekent dat bij elk spel iedere speler evenveel kans heeft op een bepaalde kaart.

Een voorbeeld van 3 hartenkaarten, 4 klaverenkaarten, 4 ruitenkaarten en 2 schoppenkaarten.

Arie, Bert, Clemens en Douwe spelen bridge.
De 52 kaarten kunnen op zeer veel verschillende manieren onder de vier spelers verdeeld worden.

9 Onderzoek of dit aantal manieren groter is dan $5 \cdot 10^{25}$.

Opstellingen

Uit een selectie van 3 keepers en 22 veldspelers moet een voetbalelftal worden samengesteld. Eén van de 3 keepers moet gekozen worden en 10 veldspelers.
De tien plaatsen in het veld zijn verschillend, dus het maakt uit welke speler op welke plaats opgesteld wordt.

10 Bereken hoeveel opstellingen er in deze situatie in totaal mogelijk zijn.

500 meter schaatsen

Benjamin en Sabrina schaatsen vrijwel altijd samen. Ze willen hun trainingsritten elke trainingsdag in een andere volgorde rijden. Toen ze als junioren allebei dagelijks 3 trainingsritten reden, begonnen ze op de eerste trainingsdag met de volgorde BSSBBS en waren ze al na 20 trainingsdagen door alle mogelijke volgordes heen.
Nu ze senioren zijn, rijden ze elke trainingsdag ieder hetzelfde, grotere aantal trainingsritten. Sabrina heeft uitgerekend dat ze nu aan een jaar niet eens genoeg hebben om alle mogelijke volgordes uit te proberen.

11 Onderzoek hoeveel trainingsritten ze elk per trainingsdag minstens rijden.

Berlijnse klok

In Berlijn staat op de Wittenbergplatz een bijzondere klok. Als je weet hoe het werkt, kun je er prima de tijd op aflezen. In figuur 1 staat een foto.

figuur 1

Het aflezen werkt als volgt:
– De 4 lampen in de bovenste balk staan elk voor 5 uur;
– De 4 lampen in de tweede balk staan elk voor 1 uur;
– De 11 lampen in de derde balk staan elk voor 5 minuten;
– De 4 lampen in de onderste balk staan elk voor 1 minuut.

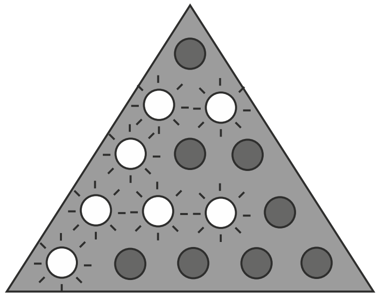
(De ronde lamp helemaal bovenaan gebruiken we hier niet.)
De lampen gaan van links naar rechts branden, telkens wanneer er een keer de bijbehorende tijdseenheid voorbij is, dus na één minuut gaat op de onderste balk de volgende lamp aan.
Wanneer er 5 minuten voorbij zijn, gaan de lampen in de onderste balk uit en gaat in de balk erboven de volgende lamp aan. Zo ook in de andere balken.
Op de klok in figuur 1 is het dus (2 × 5 + 4 × 1) uur + (11 × 5 + 2 × 1) minuten, oftewel 14:57u.

Om middernacht is het 00:00u. Dan zijn alle lampen uit. Het is nu 13:48u.

12 Bereken hoe vaak de meest rechtse lamp op de onderste balk sinds middernacht aan gegaan is.

Deze Berlijnse klok was voor Jörg Pretz aanleiding om op zoek te gaan naar een (wiskundig) mooiere klok. Hij kwam uit op de klok in figuur 2. Dit is een 12-uurs-klok.

figuur 2



De klok van figuur 2 werkt net zo als de Berlijnse klok, met kleine aanpassingen:
– De lamp in de bovenste rij staat voor 6 uur;
– De lampen in de tweede rij staan elk voor 2 uur;
– De lampen in de derde rij staan elk voor 30 minuten;
– De lampen in de vierde rij staan elk voor 6 minuten;
– De lampen in de onderste rij staan elk voor 1 minuut.

Ook op deze klok gaan de lampen van links naar rechts branden.
Op de klok in figuur 2 is het dus 2 × 2 uur + (1 × 30 + 3 × 6 + 1 × 1) minuten, oftewel 04:49u.

In de klok in figuur 2 zie je 7 lampen branden.

13 Onderzoek hoeveel tijdstippen er mogelijk zijn waarop er precies 2 lampen branden.

Je kunt je de vraag stellen hoe het komt dat deze klok kan werken.
Bij het beantwoorden van die vraag is het volgende van belang: met de onderste rij van 5 lampen zijn 6 mogelijke ‘minuut’-tijdstippen weer te geven: 00:00, 00:01, 00:02, 00:03, 00:04 en 00:05. Dat principe geldt voor elke rij.

14 Toon door het berekenen van het aantal mogelijke ‘minuut’-tijdstippen aan dat je op deze manier met 5 rijen inderdaad precies een 12-uurs-klok kunt maken.

Voetbalwedstrijden

De eindstand van de Nederlandse voetbalcompetitie van het seizoen 2008–2009 staat in onderstaande tabel.

plaats	ploeg	punten
1	AZ	80
2	FC Twente	69
3	Ajax	68
4	PSV	65
5	SC Heerenveen	60
6	FC Groningen	56
7	Feyenoord	45
8	NAC Breda	45
9	FC Utrecht	44

plaats	ploeg	punten
10	Vitesse	43
11	NEC	42
12	Willem II	37
13	Sparta Rotterdam	35
14	ADO Den Haag	32
15	Heracles Almelo	32
16	Roda JC	30
17	De Graafschap	30
18	FC Volendam	29

De 18 ploegen hebben een hele competitie tegen elkaar gespeeld, dat betekent dat elke ploeg tegen elke andere ploeg een thuiswedstrijd en een uitwedstrijd heeft gespeeld.

Voor een overwinning krijgt een ploeg 3 punten, voor een gelijkspel 1 punt en voor een verliespartij geen punten.

15 Onderzoek hoeveel wedstrijden in deze competitie zijn geëindigd in een gelijkspel.

©ThiemeMeulenhoff

Hints bij hoofdstuk 2

1 Probeer een systematische manier te vinden om het aantal hoek-, zij- en middenstukjes te tellen. Bij een hoekstukje bijvoorbeeld zijn twee zijden recht. In elk van de overige twee zijden kunnen twee situaties voorkomen: inkeping of uitstulping.

2 Bereken het aantal combinaties van twee mannetjes uit acht typen.

3 Totale aantal tegels dat gebruikt wordt = aantal met twee dezelfde symbolen + aantal met twee verschillende symbolen.

4 Als er 4 spelers in een poule zitten en elke speler eenmaal tegen elke andere speler speelt, gaat het om het aantal combinaties van 2 uit een totaal van 4 spelers.
Na de poulewedstrijden alleen nog de kwart-, halve en hele finale.

5 Een mogelijke aanpak: tel eerst alle cijfertrio's met drie gelijke cijfers, daarna alle cijfertrio's met twee gelijke cijfers en tenslotte alle cijfertrio's met drie verschillende cijfers.
Met veel tijd en geduld kun je ook alle mogelijke cijfertrio's uitschrijven.

6 Het gaat om een combinatie.

7 Als je tien vakjes aankruist en er zijn er twee goed, dan zijn er dus ook acht fout.

8 Voor elke letter zijn 26 mogelijkheden, voor elk cijfer 10.

9 Arie krijgt 13 van de 52 kaarten. Bert krijgt er 13 van de resterende 39, enzovoort.

10 Het maakt verschil waar een veldspeler wordt opgesteld dus het gaat om permutaties.

11 Bedenk eerst waar het aantal van 20 volgordes vandaan komt, als ze beide 3 trainingsritten rijden.

12 De lamp gaat voor het eerst aan om 00:04u, daarna uit om 00:05u.
Weer aan om 00:09u enzovoorts.

13 De lampen gaan branden van links naar rechts.

14 Bereken eerst hoeveel verschillende 'minuut'-tijdstippen deze klok zou moeten kunnen aangeven. Ga na dat de onderste rij 6 verschillende mogelijkheden geeft.

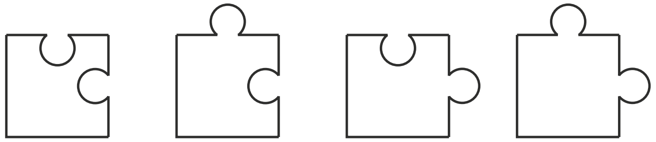
15 Bereken uit hoeveel wedstrijden een hele competitie bestaat. Hoeveel punten worden er verdeeld als er geen gelijke spelen voorkomen?

©ThiemeMeulenhoff

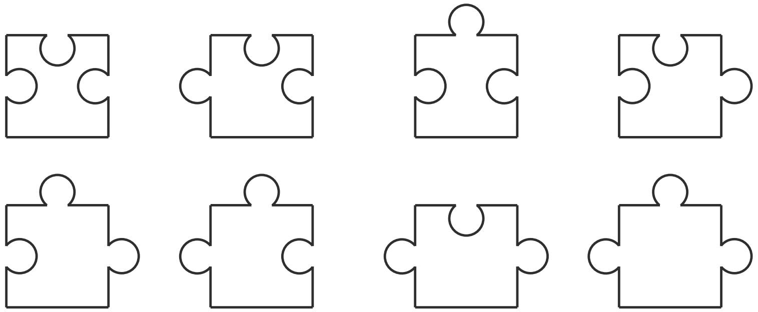
Uitwerkingen bij hoofdstuk 2

Puzzelstukjes

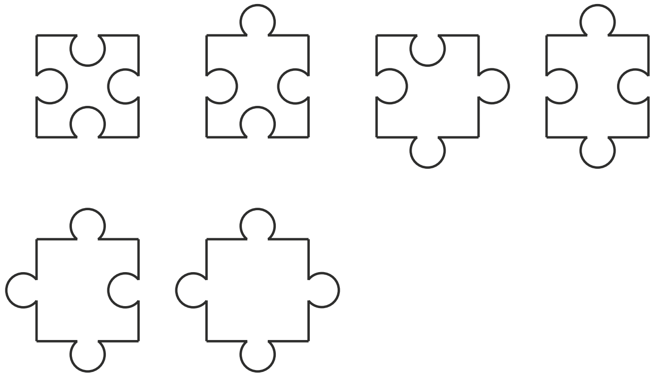
1 Er zijn 4 verschillende hoekstukjes:



Er zijn 8 verschillende zijstukjes:



Er zijn 6 verschillende middenstukjes:



Er zijn in totaal 18 verschillende vormen puzzelstukjes.

Kruisingsexperiment

2 Het aantal combinaties van twee mannetjes uit acht typen is $\binom{8}{2} = 28$ en
het aantal combinaties van twee vrouwtjes uit acht typen is ook 28.
Het totaal aantal verschillende samenstellingen in de kweekruimte is $28 \cdot 28 = 784$.
andere manier
Voor het eerste mannetje kun je kiezen uit acht verschillende typen. Voor het tweede mannetje heb je vervolgens de keuze uit zeven verschillende typen.
Dit geeft 56 combinaties maar elke combinatie is dubbel geteld dus er zijn 28 verschillende combinaties.
Hetzelfde geldt voor de vrouwtjes, dus ook op deze wijze kom je op 784 verschillende samenstellingen.

Genius

3 Er zijn zes verschillende symbolen en elke tegel met twee dezelfde symbolen komt 5 keer voor, dus in totaal zijn er 30 tegels met twee dezelfde symbolen.
Voor een tegel met twee verschillende symbolen moeten er twee symbolen gekozen worden uit een totaal van zes. Dit kan op $\binom{6}{2} = 15$ verschillende manieren.
Elk van deze tegels komt 6 keer voor, dus van dit type zijn er 90.
Het totale aantal tegels bij het spel Genius is $30 + 90 = 120$.

4 Als er 4 spelers in een poule zitten en elke speler eenmaal tegen elke andere speler speelt, zijn er $\binom{4}{2} = 6$ wedstrijden per poule want het gaat om het aantal combinaties van 2 uit een totaal van 4 spelers.
andere manier om het aantal poulewedstrijden te berekenen
De spelers A, B, C en D spelen elk eenmaal tegen elkaar. A speelt tegen B, C en D. Voor B resteren dan de wedstrijden tegen C en D. Tenslotte is er nog de wedstrijd van C tegen D. Zes wedstrijden per poule geeft 24 poulewedstrijden in totaal.

Na de poulewedstrijden spelen de resterende acht spelers 4 kwartfinales.
Vervolgens spelen de resterende vier spelers 2 halve finales.
En de laatste twee spelers spelen de finale.
In totaal zijn er in dit toernooi $24 + 4 + 2 + 1 = 31$ wedstrijden.

Tricoda

5 Het aantal cijfertrio's met drie gelijke cijfers is 5 (namelijk 333, 444, 555, 666 en 777).

Cijfertrio's met twee gelijke en een ander cijfer zijn zo opgebouwd:
22X, 33X, 44X, 55X, 66X en 77X waarbij op de plek van de X een ander cijfer staat dan ervoor, dus voor X zijn steeds 6 mogelijkheden. Op deze wijze vind je $6 \cdot 6 = 36$ verschillende cijfertrio's met twee gelijke cijfers.

Cijfertrio's met drie verschillende cijfers kun je maken door 3 cijfers te kiezen uit een totaal van 7 en dat kan op $\binom{7}{3} = 35$ verschillende manieren.

Er zijn in totaal $5 + 36 + 35 = 76$ verschillende cijfertrio's.

Keno

6 Van een groep van 80 getallen worden er 10 gekozen om te worden aangekruist.
Dit kan op $\binom{80}{10} \approx 1{,}65 \cdot 10^{12}$ manieren (of 1,65 biljoen).

7 De trekkingsmachine heeft willekeurig 22 winnende getallen gekozen.
Er zijn dus ook 58 verliezende getallen.

Het aantal mogelijkheden om op een lot 2 winnende en 8 verliezende getallen aan te kruisen is $\binom{22}{2} \cdot \binom{58}{8} \approx 4{,}43 \cdot 10^{11}$.
Het aantal mogelijkheden om 10 verliezende getallen aan te kruisen is $\binom{58}{10} \approx 5{,}22 \cdot 10^{10}$.
$\frac{4{,}43 \cdot 10^{11}}{5{,}22 \cdot 10^{10}} \approx 8{,}5$ dus Fred heeft niet gelijk, want hij beweert dat deze verhouding meer dan 10 is.

ISO-code

8 De eerste drie letters zijn vrij te kiezen uit het alfabet dus hiervoor zijn $26^3 = 17\,576$ mogelijkheden. Voor de zes cijfers zijn 10^6 mogelijkheden.
De vierde letter (altijd een U) en het zevende cijfer (ligt vast door de eerste zes cijfers) geven geen extra mogelijkheden, dus het totaal aantal verschillende containernummers is $17\,576 \cdot 10^6 = 1{,}7576 \cdot 10^{10}$ (bijna 18 miljard).

Bridge

9 De vier spelers krijgen elk 13 kaarten uit een volledige set van 52 kaarten. Het is van geen belang op welke wijze de kaarten uitgedeeld worden, dus we mogen aannemen dat eerst Arie 13 kaarten krijgt, daarna Bert, vervolgens Clemens en tenslotte Douwe.
De 13 kaarten voor Arie kunnen op $\binom{52}{13}$ verschillende manieren gegeven worden.
De 13 kaarten voor Bert komen uit de overige 39 kaarten en kunnen dus op $\binom{39}{13}$ manieren gegeven worden. Voor Clemens zijn er $\binom{26}{13}$ verschillende manieren.
Voor Douwe is maar één manier over (of $\binom{13}{13}$) want hij krijgt de resterende kaarten.
Het aantal verschillende manieren waarop de 52 kaarten onder de vier spelers verdeeld kunnen worden, is $\binom{52}{13} \cdot \binom{39}{13} \cdot \binom{26}{13} \cdot 1 \approx 5{,}36 \cdot 10^{28}$ en dat is veel groter dan $5 \cdot 10^{25}$.

Opstellingen

10 Voor de 10 veldspelers zijn er $22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13$ (of 22 nPr 10) verschillende opstellingen. Voor de keeper zijn er 3 verschillende opstellingen.
Voor het hele elftal zijn er $3 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13$ (of $3 \cdot$ (22 nPr 10))
$7{,}04 \cdot 10^{12} = 7040\,000\,000\,000$ = 7040 miljard (= 7,04 biljoen) verschillende opstellingen.

500 meter schaatsen

11 Als ze elk 3 trainingsritten per dag rijden, is het aantal volgordes $\binom{6}{3} = 20$.
Bij 4 trainingsritten per persoon per dag wordt het aantal volgordes $\binom{8}{4}$, enzovoort:

aantal trainingritten per persoon	4	5	6
aantal volgordes	$\binom{8}{4} = 70$	$\binom{10}{5} = 252$	$\binom{12}{6} = 924$

Het aantal volgordes moet groter zijn dan 365 (of 366 in een schrikkeljaar), dus rijden ze elk per trainingsdag ten minste 6 trainingsritten.
andere manier
Maak op de rekenmachine een tabel van $y_1 = (2x)$ nCr x en zoek de eerste uitkomst die groter is dan 365. Dat is bij $x = 6$.

Berlijnse klok

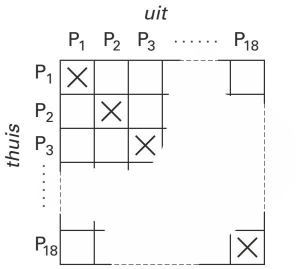
12 De meest rechtse lamp op de onderste balk gaat aan om 00:04u, daarna uit om 00:05u en weer aan om 00:09u. Elke vijf minuten gaat de lamp aan en een minuut later weer uit. Dat is dus 12 keer per uur.
Tussen 13:00u en 13:48u is de lamp 9 keer aangegaan (voor het laatst om 13:44u).
Sinds middernacht is deze lamp $13 \cdot 12 + 9 = 165$ keer aangegaan.

13 De lampen gaan branden van links naar rechts.
Als de twee lampen in dezelfde rij branden, dan zijn het twee meest linkse in een van de rijen 2, 3, 4 of 5. Dat geeft 4 mogelijkheden.
Als de twee lampen in verschillende rijen branden, dan zijn het de meest linkse in die rijen. Het aantal mogelijkheden om 2 van de 5 rijen te kiezen is $\binom{5}{2} = 10$.
Er zijn 14 verschillende tijdstippen waarop twee lampen branden.

14 In 12 uur moet de klok $12 \cdot 60 = 720$ verschillende ‘minuut’-tijdstippen kunnen aangeven.
De vijfde rij geeft 6 verschillende mogelijkheden, namelijk: 00000, 10000, 11000, 11100, 11110 en 11111 (0 = uit en 1 = aan).
Volgens dezelfde redenering geeft de 4e rij 5 mogelijkheden, de 3e rij 4 mogelijkheden, de 2e rij 3 mogelijkheden en de 1e rij 2 mogelijkheden.
Dit geeft in totaal $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 6! = 720$ verschillende ‘minuut’-tijdstippen.

Voetbalwedstrijden

15 In een rooster van 18 bij 18 hokjes kun je alle wedstrijden tussen de 18 ploegen aangeven. De diagonaal telt niet mee, anders zou een ploeg tegen zichzelf spelen.



Totaal worden er 18 × 18 – 18 = 306 wedstrijden gespeeld.
andere manier om het aantal wedstrijden te bepalen
Elk van de 18 ploegen speelt 17 thuiswedstrijden. Totaal worden er 18 · 17 = 306 wedstrijden gespeeld.
nog een andere manier om het aantal wedstrijden te bepalen
Er bestaan $\binom{18}{2}$ verschillende combinaties van 2 ploegen uit een totaal van 18, maar omdat elk tweetal ploegen twee maal tegen elkaar speelt is het aantal wedstrijden $2 \cdot \binom{18}{2} = 306$.
Alle ploegen samen verzamelen 80 + 69 + 68 + ... + 30 + 29 = 842 punten.
Als alle 306 wedstrijden in een overwinning voor een van beide ploegen zouden zijn geëindigd, zouden er door alle ploegen samen 306 · 3 = 918 punten zijn behaald.
Bij een gelijk spel worden er 2 in plaats van 3 punten verdeeld, dus elk punt minder dan 918 betekent een gelijk spel.
Er zijn in deze competitie 918 – 842 = 76 wedstrijden geëindigd in een gelijk spel.

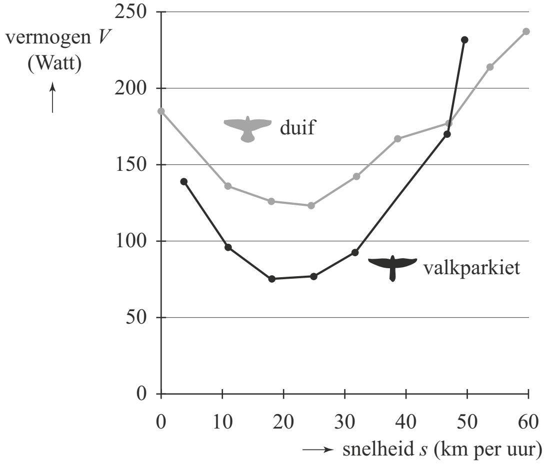
©ThiemeMeulenhoff

3 Lineaire, kwadratische en machtsfuncties

De valkparkiet

Er wordt veel onderzoek gedaan naar het verband tussen het vermogen (het energieverbruik per seconde) en de vliegsnelheid bij vogels. Het vermogen V wordt gemeten per kg borstspier en uitgedrukt in Watt.

Een onderzoek heeft uitgewezen dat de grafiek van het verband tussen de vliegsnelheid en het vermogen U-vormig is. Dat wil zeggen: vliegen met lage of hoge snelheid kost veel vermogen, terwijl vliegen met een snelheid daartussenin minder vermogen kost.
In de figuur is dit verband voor valkparkieten en duiven weergegeven.



Dit onderzoek toont bij valkparkieten een bij benadering kwadratisch verband aan tussen de vliegsnelheid en het vermogen.
Voor valkparkieten geldt de volgende formule:

$V = 0{,}19s^2 - 8{,}71s + 169{,}72$

Hierbij is V het vermogen in Watt en s de snelheid in km per uur.

1 Bereken met behulp van de formule bij welke snelheden het vermogen V van een valkparkiet 120 Watt is.

2 Bereken met behulp van de afgeleide bij welke snelheid het vermogen V van een valkparkiet minimaal is.

Ook bij duiven kunnen we een formule opstellen voor het verband tussen s en V.
In de figuur kunnen we aflezen dat duiven bij een snelheid van 8 km per uur en bij een snelheid van 34 km per uur een vermogen van 150 Watt ontwikkelen.
Voor duiven is het verband tussen de vliegsnelheid en het vermogen dan van de vorm:

$V = p \cdot (s - 8)(s - 34) + 150$

Ook hier is V het vermogen in Watt en s de snelheid in km per uur.

©ThiemeMeulenhoff

Het is bekend dat duiven die stil in de lucht hangen (s = 0) een vermogen van 185 Watt ontwikkelen.
Met dit gegeven kunnen we nu de constante p berekenen.

3 Bereken p en herschrijf de formule in de vorm $V = as^2 + bs + c$.

Marathonloopsters

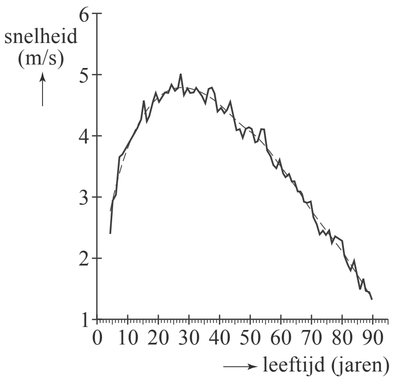
De Olympische hardloopwedstrijd met de grootste lengte is de marathon: ruim 42 kilometer, om precies te zijn 42 195 meter. De marathon wordt zowel door mannen als door vrouwen gelopen. In deze opgave concentreren we ons op de marathonloopsters.
De prestatie van een loopster geeft men in krantenberichten meestal weer door de tijd waarin de marathon is afgelegd, maar een even duidelijke maat is de gemiddelde snelheid over het gehele parcours. Dit noemen we kortweg de **snelheid**. Deze snelheid drukken we uit in m/s (meters per seconde).

Een marathonloopster legt de marathon af in 2 uur, 43 minuten en 32 seconden.

4 Bereken haar snelheid in m/s.

Elmer Sterken van de Rijksuniversiteit Groningen heeft onderzoek gedaan naar het verband tussen de snelheid van Amerikaanse marathonloopsters en hun leeftijden. Figuur 1 is afkomstig uit het rapport dat hij daarover geschreven heeft. In figuur 1 is voor iedere leeftijd weergegeven de hoogste snelheid ooit gelopen door een Amerikaanse (zie de 'zigzaglijn'). De geregistreerde leeftijden lopen van 6 tot en met 90 jaar1$^{)}$.

figuur 1



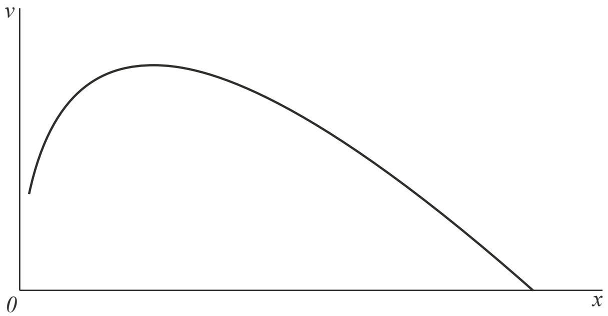
De 'zigzaglijn' is in figuur 1 benaderd door de grafiek met de formule:

$v = 2{,}836 \cdot x^{0{,}665} - 1{,}390 \cdot x^{0{,}818}$

Hierin is v de hoogste snelheid in m/s van marathonloopsters met een leeftijd van x jaar. In figuur 2 is de grafiek van v weergegeven.

noot 1 Figuur 1 is ontstaan door allerlei gegevens van verschillende loopafstanden (op verantwoorde manier) om te zetten naar de marathonlengte. Hierdoor zijn in deze figuur ook voor een marathon onwaarschijnlijk jonge leeftijden vermeld.

figuur 2



In het vervolg van deze opgave beschouwen we deze laatste grafiek en de formule voor v als een wiskundig model van de werkelijkheid.

Petra loopt vaker een marathon en hoopt binnenkort de marathon binnen 3 uur te volbrengen. Petra is 52 jaar.

5 Kan een 52-jarige marathonloopster volgens dit model de marathon binnen 3 uur lopen? Licht je antwoord toe.

De grafiek van v heeft een maximum.
Volgens het model is er dus blijkbaar een leeftijd waarop marathonloopsters (gemiddeld) het beste presteren.

6 Stel de afgeleide van v op en bereken hiermee deze leeftijd.

Lichaamsoppervlak

De buitenkant van je lichaam is je lichaamsoppervlak. Gegevens over iemands lichaamsoppervlak worden bijvoorbeeld gebruikt voor risicoanalyse bij bestrijdingsmiddelen. De schadelijke stoffen hierin kunnen via de huid in het lichaam worden opgenomen. In een rapport van het RIVM (Rijksinstituut voor Volksgezondheid en Milieu) is een tabel te vinden waarin onder andere de lichaamsoppervlakte is af te lezen. Een gedeelte van deze tabel is hieronder weergegeven.

	lichaamsoppervlakte in % van de totale oppervlakte			
leeftijd	hoofd	romp	armen en handen	benen en voeten
1,5 jaar	16,2	34,0	18,15	31,65
17,5 jaar	8,1	32,1	21,0	38,8

Bij jonge kinderen is het hoofd ten opzichte van de rest van het lichaam relatief groot. Als kinderen ouder worden, groeien de armen en handen en de benen en voeten sneller dan de rest van het lichaam.

Het aandeel van armen en handen in de lichaamsoppervlakte is voor kinderen in de periode van 1,5 jaar tot 17,5 jaar gestegen van 18,15% naar 21,0%. Ook het aandeel van de benen en voeten is in die 16 jaar groter geworden.

7 Onderzoek of de relatieve toename van het aandeel van armen en handen groter is dan de relatieve toename van het aandeel van benen en voeten.

Er zijn ook formules waarmee we de lichaamsoppervlakte kunnen berekenen.
Voor volwassen vrouwen is de volgende formule de meest gebruikte formule:

$S_{Dubois} = 0{,}007184 \cdot L^{0{,}725} \cdot M^{0{,}425}$ (formule van Dubois)

In deze formule is S_{Dubois} de lichaamsoppervlakte in m^2, L de lichaamslengte in cm en M het lichaamsgewicht in kg.

Als een lichaam groter wordt, dan zal de lichaamsoppervlakte ook groter worden. Kunnen we dit ook zien aan de formule van Dubois? Hoe zit het bijvoorbeeld als alle lengtematen (lengte, breedte, hoogte) van een lichaam 2 keer zo groot worden?
Bij een kubus wordt in dat geval de oppervlakte 4 keer en het volume 8 keer zo groot.
Wordt de uitkomst van de formule van Dubois dan ook 4 keer zo groot?
Hiertoe vergelijken we $S_{Dubois(2)} = 0{,}007184 \cdot (2L)^{0{,}725} \cdot (8M)^{0{,}425}$ met

$S_{Dubois(1)} = 0{,}007184 \cdot L^{0{,}725} \cdot M^{0{,}425}$.
We gaan er hierbij van uit dat het lichaamsgewicht (M) evenredig is met het volume.

8 Toon met behulp van deze formules (zonder getallenvoorbeelden) aan dat de formule van Dubois inderdaad bij verdubbeling van lengtematen een verviervoudiging van de lichaamsoppervlakte S_{Dubois} oplevert.

Bij een volwassen vrouw met een lengte van 1,75 m hoort, uitgaande van de bovenstaande formule van Dubois, de formule

$S_{Dubois} = 0{,}303787 \cdot M^{0{,}425}$

9 Bereken door middel van differentiëren van deze laatste formule de waarde van de afgeleide voor $M = 66$ kg en leg uit wat de betekenis is van die waarde.

Voor het berekenen van de lichaamsoppervlakte bij kinderen worden vooral de volgende twee formules gebruikt:

$S_{Mosteller} = \sqrt{\frac{1}{3600} \cdot L \cdot M}$ (formule van Mosteller)

$S_{Haycock} = 0{,}024265 \cdot L^{0{,}3964} \cdot M^{0{,}5378}$ (formule van Haycock)

Ook in deze formules is S de lichaamsoppervlakte in m^2, L de lichaamslengte in cm en M het lichaamsgewicht in kg.

Om de formules beter met elkaar te kunnen vergelijken is het handig om de formule van Mosteller in dezelfde vorm te schrijven als de formule van Haycock.
10 Schrijf de formule van Mosteller in de vorm $S = c \cdot L^a \cdot M^b$ en licht toe hoe je je antwoord gevonden hebt.

Labironia

Beleggingsmaatschappijen zoeken steeds naar nieuwe manieren om geld te beleggen. Eén van die manieren is beleggen in bomen.

Plantage waar bomen voor belegging gekweekt worden

Over het beleggen in bomen schrijft een beleggingsmaatschappij in een reclamefolder het volgende:

Uw belegging groeit vanzelf.
De Labironia is een duurzame houtsoort. De houtindustrie maakt veel gebruik van de Labironia en het is te verwachten dat de vraag naar Labironia in de komende jaren zal toenemen. Van het geld dat u belegt, worden een stuk grond en jonge boompjes gekocht. Het stuk grond is verdeeld in percelen en op elk perceel worden 960 boompjes geplant. Hoe ouder de bomen, hoe langer en dikker ze worden. Voordat de bomen gekapt worden, groeien ze voortdurend volgens de formules

$L = 0{,}75 \cdot t$ en $D = 0{,}0042 \cdot t + 0{,}072$.

Hierbij is t de tijd in jaren na het plantmoment, L de lengte van een boom in meters en D de stamdiameter in m.

De houtopbrengst wordt berekend met de formule $M = 0{,}16 \cdot D^2 \cdot L$. Hierin is M het aantal m^3 benutbaar hout van de boom.

Die formules voor L en D benaderen de werkelijke groei slechts. Direct na het planten passen de formules echter nog niet zo goed bij de echte groei van de bomen.
Pas vanaf het moment dat volgens de formules de diameter van de Labironia-boom 5% bedraagt van de lengte van een Labironia-boom, gelden de formules.
11 Vanaf welk moment na het plantmoment gelden de formules?

Een Labironia-boom van 15 jaar oud levert meer m^3 benutbaar hout op dan een van 8 jaar oud.
12 Bereken hoeveel m^3 het verschil bedraagt. Geef je antwoord in 3 decimalen nauwkeurig.

Ook is het zo dat de groei van oudere bomen van deze soort niet volgens de formules plaats zal vinden. Omdat alle bomen toch op een bepaald vastgesteld moment na het planten gekapt zullen worden, is het in deze opgave niet van belang dat de groei op zeker moment niet meer volgens de formules verloopt.
De 960 bomen op één perceel worden niet alle op hetzelfde moment gekapt. Dat kappen gebeurt in verschillende rondes. De laatste ronde van dat kappen, het moment dus dat alle bomen gekapt zijn, vindt plaats op het moment dat een Labironia-boom een diameter heeft van 0,156 m.

13 Bereken de lengte van een Labironia-boom op het moment van de laatste kapronde.

De houtopbrengst van een boom kan geschreven worden in de volgende vorm:

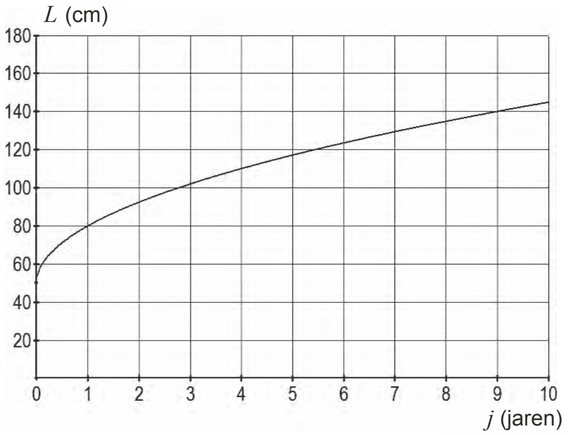
$M = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t$

14 Bereken *a*, *b* en *c*.

Lengte van jongetjes

Een onderzoeker heeft gegevens verzameld over de gemiddelde lengte van jongetjes van 0 tot 10 jaar in Nederland. In figuur 1 zie je het verband tussen de gemiddelde lengte *L* en de leeftijd *j*.

figuur 1



De formule die het verband tussen *j* en *L* beschrijft is

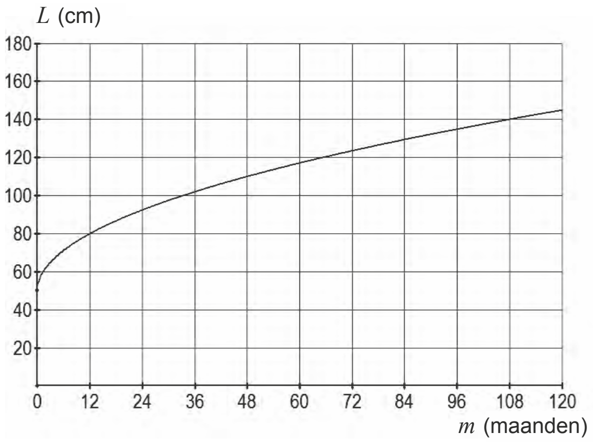
$L = p + q\sqrt{j}$

waarin *p* en *q* getallen zijn.

15 Bereken de waarden van *p* en *q*.

De onderzoeker is vooral geïnteresseerd in het verband tussen lengte en leeftijd in de eerste maanden na de geboorte. Zij maakt daartoe de grafiek van figuur 2.

figuur 2



16 Teken met behulp van de formule een grafiek van het verband tussen de gemiddelde lengte *L* en de leeftijd m in maanden voor het eerste levensjaar. Neem op de horizontale as 1 cm voor elke maand en op de verticale as 1 cm voor elke 5 cm lengte (gebruik een scheurlijn).

Uit de gegeven formule die het verband tussen *L* en *j* beschrijft, is een vergelijkbare formule af te leiden van het verband tussen *L* en *m*.

17 Stel een formule op die het verband tussen *L* en *m* beschrijft.

Powerliften

Powerliften is een krachtsport waarbij de sporter een zo groot mogelijk gewicht omhoog probeert te tillen. Het wordt beoefend door zowel mannen als vrouwen en er zijn drie categorieën: benchpress, squat en deadlift.
In deze opgave beperken we ons tot benchpress voor mannen. Bij benchpress (bankdrukken) wordt een gewicht getild terwijl de sporter met zijn rug op een bank ligt. Zie de foto.

Het lichaamsgewicht van powerlifters kan enorm uiteenlopen. In deze opgave gaan we ervan uit dat een powerlifter altijd minimaal 50 kg weegt. Iemand met een groot lichaamsgewicht kan meestal meer tillen dan iemand met een klein lichaamsgewicht. Om de prestaties van powerlifters met verschillend lichaamsgewicht met elkaar te kunnen vergelijken, moet er gecorrigeerd worden voor het lichaamsgewicht. Hiervoor bestaan diverse modellen.

Volgens een **theoretisch model** moet je als volgt corrigeren voor het lichaamsgewicht:

$$P_{\text{theoretisch}} = \frac{T}{12 \cdot L^{0,667}}$$

In deze formule is T het getilde gewicht in kg en L het lichaamsgewicht in kg, met $L \geq 50$. Het getal $P_{\text{theoretisch}}$ is een maat voor de prestatie: een grotere waarde van $P_{\text{theoretisch}}$ betekent een grotere prestatie.
Een zwaardere powerlifter moet meer tillen dan een lichtere powerlifter om volgens het theoretisch model dezelfde prestatie te leveren.

Een powerlifter van 70 kg tilt een gewicht van 150 kg.
18 Bereken hoeveel kg een powerlifter van 100 kg moet tillen om volgens het theoretisch model dezelfde prestatie te leveren.

We bekijken een lichte powerlifter A met een lichaamsgewicht van 50 kg en een zware powerlifter B met een lichaamsgewicht van 150 kg. Als B volgens het theoretisch model dezelfde prestatie wil leveren als A, moet B een ruim twee keer zo groot gewicht tillen als A.
19 Toon dit aan.

In plaats van het theoretisch model kan men ook een andere formule gebruiken om te corrigeren voor het lichaamsgewicht. De **formule van Siff** is zo'n formule:

$$P_{\text{Siff}} = \frac{T}{408{,}15 - \frac{11047}{L^{0,9371}}}$$

In deze formule geldt weer dat T het getilde gewicht in kg is en L het lichaamsgewicht in kg, met $L \geq 50$. Het getal P_{Siff} is een maat voor de prestatie.

20 Bereken voor welke lichaamsgewichten de formule van Siff een hogere waarde voor de prestatie geeft dan het theoretische model.

Ook voor de formule van Siff geldt dat een zwaardere powerlifter meer moet tillen voor dezelfde prestatie. Anders gezegd: als powerlifters hetzelfde gewicht tillen, is de prestatie volgens de formule kleiner naarmate de powerlifter zwaarder is.
We kijken naar powerlifters die eenzelfde gewicht tillen, namelijk 80 kg. Voor deze situatie hangt de prestatie volgens de formule van Siff als volgt af van het lichaamsgewicht:

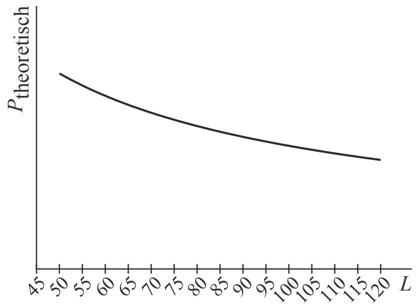
$$P_{\text{Siff}} = \frac{80}{408{,}15 - \frac{11047}{L^{0,9371}}}$$

Als het getilde gewicht 80 kg is, neemt de prestatie volgens deze formule altijd af als het lichaamsgewicht toeneemt.
21 Beredeneer dit aan de hand van de formule van Siff zonder te differentiëren.

We kijken nu alleen nog maar naar het theoretisch model bij powerlifters die een gewicht van 120 kg tillen. Er geldt dan:

$$P_{\text{theoretisch}} = \frac{120}{12 \cdot L^{0,667}}$$

In de figuur hiernaast is voor deze situatie een grafiek getekend van de prestatie ten opzichte van het lichaamsgewicht van de powerlifter. In deze grafiek is te zien dat het tillen van eenzelfde gewicht (van 120 kg) voor een lichtere powerlifter een hogere prestatie oplevert dan voor een zwaardere powerlifter.



Twee powerlifters tillen allebei 120 kg.
De ene powerlifter weegt 65 kg, de andere weegt 105 kg. Beide powerlifters besluiten af te vallen. In de grafiek is te zien dat de prestatie van de lichtste powerlifter het meest zal stijgen als ze allebei evenveel afvallen.
Dit is ook in te zien door de afgeleide te gebruiken.
22 Toon met behulp van de afgeleide aan dat de prestatie van de lichtste powerlifter het meest zal stijgen als ze allebei evenveel afvallen.

Behendigheid

In Nederland wordt er verschil gemaakt tussen kansspelen en behendigheidsspelen. Een spel als roulette, waarbij de speler geen enkele invloed kan uitoefenen op het verloop van het spel (en dus ook niet op zijn winst-/verlieskansen) is duidelijk een kansspel. Een spel als schaken echter waarbij een speler zijn winst-/verlieskansen zelf kan beïnvloeden door oefening is natuurlijk een behendigheidsspel. Er zijn echter ook verschillende spelen waarbij niet meteen vast te stellen is om welke categorie het gaat.
Zo kun je je bij pokeren afvragen of dit een kansspel of een behendigheidsspel is.
De onderzoekers Borm en Van der Genugten hebben een methode ontwikkeld om bij elk spel dit onderscheid te maken. Daartoe hebben ze enkele begrippen gedefinieerd:
– het **toevalseffect** *TE*
– het **leereffect** *LE*
Het toevalseffect is een getal dat uitdrukt in welke mate het toeval een rol speelt bij het spel: het toevalseffect is groot als het toeval een grote rol speelt. Het leereffect is een getal dat aangeeft in hoeverre een grotere ervaring helpt bij het spelen van het spel: het leereffect is groter naarmate de ervaring een grotere bijdrage levert aan de uitkomst van het spel.
Beide getallen, toevalseffect *TE* en leereffect *LE*, zijn (natuurlijk) nooit negatief.
Ze zijn ook nooit beide tegelijkertijd 0.
Hoe die getallen *TE* en *LE* bepaald worden, komt verderop in deze opgave aan de orde. Eerst kijken we naar een formule die Borm en Van der Genugten gemaakt hebben met die twee begrippen. Deze formule ziet er als volgt uit:

$$B = \frac{LE}{LE + TE}$$

Het getal B dat met deze formule wordt berekend, noemen de onderzoekers het **behendigheidsniveau**. Ook al weten we nu nog niet hoe TE en LE bepaald worden, toch kunnen we wel iets zeggen over de mogelijke waarde van het getal B.

1. B is nooit negatief;
2. B is ten hoogste 1;
3. Als twee spelen hetzelfde positieve leereffect hebben, is B groter bij het spel met het kleinere toevalseffect;
4. Als twee spelen hetzelfde positieve toevalseffect hebben, is B groter bij het spel met het grotere leereffect.

23 Laat met behulp van de formule en de omschrijvingen van TE en LE zien dat de bovenstaande beweringen 1, 2 en 3 juist zijn.

De bovenstaande formule voor B is ook te schrijven als $B = 1 - \frac{TE}{LE + TE}$

24 Toon aan dat deze formule ook geschreven kan worden als $B = 1 - \frac{TE}{LE + TE}$

Om de vierde bewering "Als twee spelen hetzelfde positieve toevalseffect hebben, is B groter bij het spel met het grotere leereffect" na te gaan, kun je gebruik maken van de formule $B = 1 - \frac{TE}{LE + TE}$

25 Leg met behulp van $B = 1 - \frac{TE}{LE + TE}$ uit dat de vierde bewering inderdaad juist is.

Om het behendigheidsniveau van een spel te bepalen moet je dus een methode vaststellen om TE en LE van dat spel te berekenen. Borm en Van der Genugten hebben dat bij verschillende spelen gedaan en hebben daarna ook een grens vastgesteld waarmee ze een onderscheid konden maken tussen een kansspel en een behendigheidsspel. Die grens ligt volgens de onderzoekers bij $B = 0{,}20$.
Als B groter is dan 0,20 heb je te maken met een behendigheidsspel.
Deze grens van 0,20 betekent dat in een kansspel het leereffect wel een rol mag spelen, maar niet te veel. Het leereffect moet beduidend kleiner zijn dan het toevalseffect.

Op 3 maart 1998 concludeerde de Hoge Raad dat poker een kansspel is (en daarom alleen mag worden gespeeld in door de overheid gecontroleerde casino's).

pokeren een kansspel?

De onderzoekers hebben in samenwerking met het televisieprogramma Nieuwslicht een experiment uitgevoerd om na te gaan of deze beslissing van de Hoge Raad wel terecht was. In het verslag over dit experiment schrijven zij op welke manier zij het behendigheidsniveau van het pokerspel 'Texas Hold'Em' hebben bepaald. Zij deelden de spelers in drie typen in:

- de beginner, die alleen de regels van het spel kent (zijn winst in het spel wordt alleen door geluk bepaald);
- de ervaren speler, die veel ervaring heeft met het spel (zijn winst wordt bepaald door geluk en kunde);
- de fictieve speler[1)], een ervaren speler die ook informatie heeft over toevalselementen in het spel, bijvoorbeeld welke kaarten de andere spelers hebben en welke kaarten er op tafel zullen komen te liggen (zijn winst wordt door geluk, kunde en informatie bepaald).

Met behulp hiervan definieerden Borm en Van der Genugten TE en LE:

TE = winst van de fictieve speler – winst van de ervaren speler

LE = winst van de ervaren speler – winst van de beginner

26 Leg uit dat TE groter is naarmate het toeval een grotere rol speelt bij de uitkomst van het spel.

In een ander experiment, vergelijkbaar met dat van Nieuwslicht, speelden een beginner, een ervaren speler en een fictieve speler aan aparte tafels onder dezelfde omstandigheden elk drie rondes. Allen kregen bij het begin van iedere ronde evenveel geld om in te kunnen zetten. Na die drie rondes werd de stand opgemaakt van de winst per ronde. Zie de tabel.

winst per ronde in euro's

	beginner	ervaren speler	fictieve speler
ronde 1	–28	–11	10
ronde 2	30	90	161
ronde 3	–32	1	219

Om na te gaan of poker wel of niet als kansspel gezien moet worden, kun je de totale winst van ieder van de drie spelers in de tabel berekenen en daarmee het behendigheidsniveau B bepalen van het pokerspel 'Texas Hold'Em'.

27 Is het pokerspel 'Texas Hold'Em' volgens de methode van Borm en Van der Genugten een kansspel als je uitgaat van de tabel? Licht je antwoord toe.

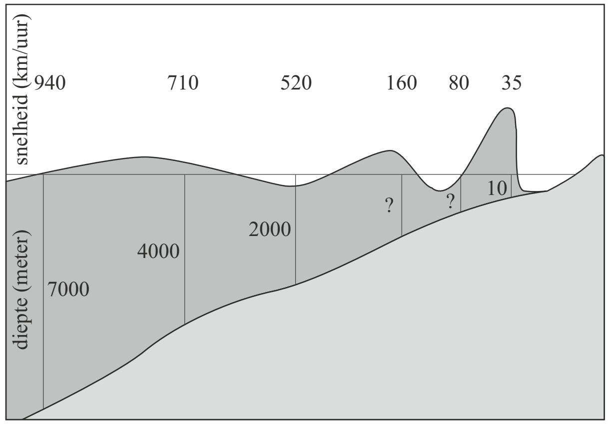
noot 1 Die fictieve speler bestond alleen in dit experiment: hij verkreeg zijn extra informatie door het gebruik van een 'oortje' waarmee hem informatie doorgegeven werd die in een normaal spel onbekend is voor een speler.

Tsunami

Op 26 december 2004 werd Zuidoost-Azië getroffen door een tsunami. Een tsunami is één heel lange golf die bij de kust heel hoog wordt. De tsunami had rampzalige gevolgen voor een aantal kustgebieden. Dit kwam door de enorme hoeveelheid water die door deze tsunami werd meegevoerd.

In onderstaande figuur is een schematisch overzicht te zien van het verloop van een tsunami. Boven elke genoemde waterdiepte is steeds de bijbehorende snelheid weergegeven.

snelheid in km/uur bij verschillende waterdiepten



In de figuur is bijvoorbeeld te zien dat een tsunami bij een diepte van 4000 meter zich met een snelheid van 710 km/uur verplaatst.

Voor de snelheid van een tsunami geldt bij benadering de volgende formule:

$v = 11{,}3\sqrt{d}$

Hierin is v de snelheid in km/uur en d de waterdiepte in meter.

In de figuur ontbreken twee waarden voor de waterdiepte. Zij zijn aangegeven met een vraagteken.

28 Bereken met behulp van bovenstaande formule en de gegevens uit de figuur deze twee ontbrekende waarden.

De tsunami van december 2004 werd veroorzaakt door een aardbeving onder zee, 150 km uit de kust van het Indonesische eiland Sumatra.
De tsunami plantte zich voort door de Golf van Bengalen, waar de zee ongeveer 3 km diep is.

29 Bereken hoeveel minuten een tsunami nodig heeft om een afstand van 150 km af te leggen in water van 3 km diep.

In de figuur is ook te zien dat in de buurt van de kust, waar de waterdiepte niet zo groot is, de golfhoogte van een tsunami groter wordt. Op volle zee, waar de waterdiepte groot is, is de golfhoogte niet zo hoog.

Bij tsunami's is het volgende verband gevonden tussen waterdieptes en golfhoogtes:

$h_2 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{0,25} \cdot h_1$

Hierin is h_1 de golfhoogte bij waterdiepte d_1 en h_2 de golfhoogte bij waterdiepte d_2; h_1, d_1, h_2 en d_2 zijn in meters.

De tsunami van 26 december 2004 ontstond in een gebied met waterdiepte 1 km en golfhoogte 60 cm. Met deze gegevens en de formule $h_2 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{0,25} \cdot h_1$ kunnen we voor het verdere verloop van deze tsunami het verband tussen de waterdiepte d en de golfhoogte h beschrijven met de formule:

$h = 3{,}37 \cdot d^{-0{,}25}$

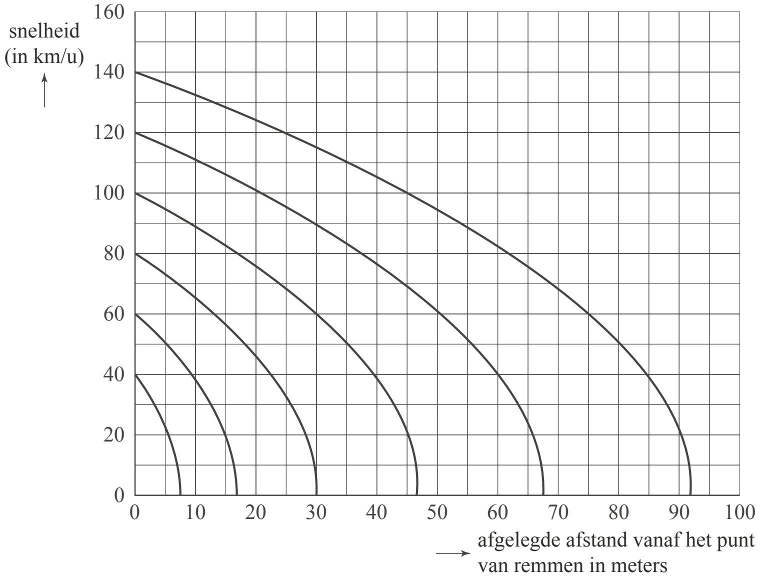
30 Toon dit aan.

Naarmate een golf dichter bij de kust komt, neemt de waterdiepte steeds verder af. Dit is ook in de figuur te zien. In de figuur kun je ook zien dat de golfhoogte toeneemt als de golf dichter bij de kust komt.
Met behulp van de afgeleide van h kun je onderzoeken of de **toename** van de golfhoogte groter of kleiner wordt naarmate de golf dichter bij de kust komt.
31 Onderzoek met behulp van een schets van de afgeleide van h of deze toename groter of kleiner wordt naarmate de golf dichter bij de kust komt.

Remweg

Wanneer een automobilist op de rem trapt, zal de snelheid van de auto afnemen. In figuur 1 is voor beginsnelheden van 40, 60, 80, 100, 120 en 140 km per uur het verband weergegeven tussen de snelheid van een auto en de afgelegde afstand vanaf het punt waarop begonnen is met remmen.

figuur 1



In figuur 1 kun je bijvoorbeeld aflezen dat een auto die gaat remmen met een beginsnelheid van 120 km per uur na 20 m nog een snelheid heeft van (ongeveer) 101 km per uur.
Je zou kunnen zeggen dat bij een beginsnelheid van 120 km per uur de auto na 20 m remmen (ongeveer) 16% in snelheid is gedaald.

32 Bereken hoeveel procent de snelheid van de auto is gedaald na 20 m remmen bij een beginsnelheid van 80 km per uur.

De bovenste grafiek in figuur 1 hoort bij een beginsnelheid van 140 km per uur. Voor deze grafiek wordt het verband tussen de snelheid en de afgelegde afstand vanaf het punt van remmen gegeven door de volgende formule:

$v = \sqrt{a + b \cdot x}$

In deze formule is v de snelheid in km per uur en x de afgelegde afstand vanaf het punt van remmen. In de formule zijn a en b constanten.

33 Bereken de waarden van deze twee constanten bij een beginsnelheid van 140 km per uur.

In figuur 1 kun je aflezen dat de auto bij een beginsnelheid van 40 km per uur na ongeveer 7,5 m remmen tot stilstand is gekomen. We zeggen dat bij een beginsnelheid van 40 km per uur de remweg 7,5 m bedraagt. Ook voor grotere beginsnelheden kun je de remweg uit figuur 1 aflezen.
Iemand beweert dat de remweg van de auto evenredig is met het kwadraat van de beginsnelheid. Dat betekent dat het verband tussen de beginsnelheid en de remweg wordt gegeven door de volgende formule:

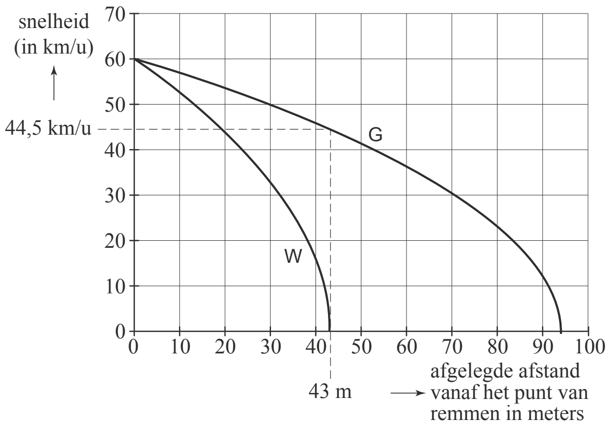
$remweg = c \cdot v_0^2$

Hierin is v_0 de beginsnelheid in km per uur. De remweg is in m. Het getal c is een constante.

34 Lees in figuur 1 bij de zes genoemde beginsnelheden de remweg af en laat met behulp daarvan zien dat de remweg inderdaad evenredig is met het kwadraat van de beginsnelheid. Bepaal ook de waarde van de constante c in drie decimalen nauwkeurig.

De grafieken in figuur 1 gelden voor gewone banden op een droge weg. Op een besneeuwde weg wordt de remweg aanzienlijk langer. Daarom rijden sommige automobilisten ’s winters op winterbanden. Winterbanden zorgen ervoor dat op een besneeuwde weg de remweg veel korter is dan bij gewone banden.
We laten op hetzelfde moment twee auto’s met beginsnelheid 60 km per uur remmen op een besneeuwde weg. De ene auto heeft gewone banden (auto G), de andere auto heeft winterbanden (auto W).

figuur 2



In figuur 2 kunnen we aflezen dat auto W een remweg heeft van ongeveer 43 m. Op het tijdstip dat de auto W tot stilstand komt, heeft auto G nog een behoorlijke snelheid.
Alex, Bernhard en Cynthia doen alle drie een bewering over die snelheid.
Alex: ‘De snelheid op dat tijdstip is zeker groter dan 44,5 km per uur.’
Bernhard: ‘De snelheid op dat tijdstip is ongeveer gelijk aan 44,5 km per uur.’
Cynthia: ‘De snelheid op dat tijdstip is zeker kleiner dan 44,5 km per uur.’

35 Leg uit waarom Cynthia gelijk heeft.

Al doende leert men

In de Amerikaanse industrie is ooit onderzocht hoe snel werknemers leren wanneer zij een handeling vaker verrichten. Bij een groot aantal werknemers is bijgehouden hoeveel tijd ze nodig hadden om een bepaalde handeling voor de eerste keer te verrichten, hoeveel tijd voor de tweede keer, enz.

Zo bleken werknemers 16 minuten nodig te hebben om handeling A voor de eerste keer te verrichten. Bij de tweede keer was die handelingstijd 12,8 minuten. Dus wanneer een werknemer handeling A twee keer heeft uitgevoerd, is zijn gemiddelde handelingstijd $\frac{16 + 12{,}8}{2} = 14{,}4$ minuten.

Deze 14,4 minuten zie je in de tabel. De andere waarden in deze tabel zijn op een vergelijkbare manier berekend.

aantal keren dat handeling A is verricht (n)	1	2	3	4	5	6
gemiddelde handelingstijd in minuten	16	14,4	13,1	12,1	11,3	10,7

Met behulp van de tabel kunnen we berekenen dat een werknemer 8,1 minuten nodig heeft om handeling A voor de 5e keer te verrichten.

36 Geef zo’n berekening.

Wanneer we de gemiddelde handelingstijd H_n willen uitrekenen voor meer dan 6 handelingen is het handig te beschikken over een formule voor H_n. Hiertoe zijn verschillende pogingen ondernomen. Eén zo'n poging resulteerde in de formule:

$H_n = 0{,}14n^2 - 2n + 17{,}8$

Deze formule komt redelijk overeen met de gegevens van tabel 1 voor $n = 1$ tot en met $n = 6$.

37 Bereken het grootste verschil tussen de uitkomsten uit tabel 1 en de bijbehorende waarden van H_n.

Voor grote waarden van n is de formule voor H_n echter niet geschikt om de gemiddelde handelingstijd te beschrijven.

38 Leg uit waarom de formule voor H_n niet geschikt is.

Het is niet zo eenvoudig een formule voor H_n te vinden die wel voldoet.
Toch kunnen we bijvoorbeeld de gemiddelde handelingstijd na 10 handelingen uitrekenen. Daarbij maken we gebruik van T_n, de tijd die een werknemer nodig heeft om handeling A voor de n-de keer te verrichten. T_n kan goed worden benaderd met de formule:

$T_n = 6 + 14{,}7 \cdot 0{,}68^n$

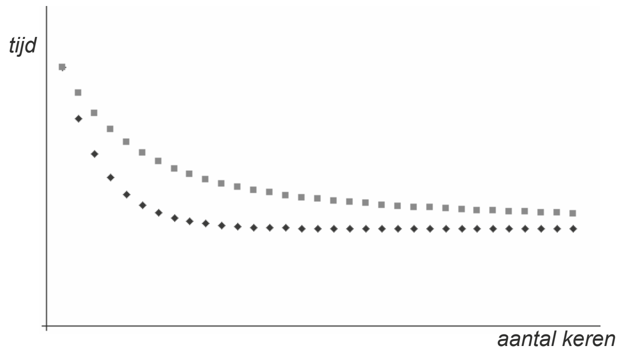
In deze formule is T_n in minuten. Inderdaad levert deze formule $T_1 \approx 16$ en $T_2 \approx 12{,}8$.

Met deze formule kunnen we ook andere handelingstijden uitrekenen en dus ook gemiddelde handelingstijden berekenen.

39 Bereken hoe groot de gemiddelde handelingstijd is wanneer een werknemer 10 keer handeling A heeft uitgevoerd.

Als je kijkt naar de formule $T_n = 6 + 14{,}7 \cdot 0{,}68^n$, dan kun je constateren dat T_n steeds kleiner wordt als n groter wordt. Op de lange duur komt T_n echter niet onder een bepaalde grens.

40 Hoe groot is die grens? Licht je antwoord toe.



Hierboven staan schetsen van de grafieken van de handelingstijd en de gemiddelde handelingstijd in één assenstelsel. Naar aanleiding van deze figuur maakt iemand de volgende twee opmerkingen:

1 Een van beide grafieken zal altijd boven de andere grafiek liggen.
2 De twee grafieken komen steeds dichter bij elkaar en er zal op den duur geen echt verschil meer te zien zijn.

©ThiemeMeulenhoff

Door redeneren zonder rekenen kun je onderzoeken of deze opmerkingen waar zijn of niet.

41 Onderzoek op deze wijze of deze beweringen waar zijn.

Tanken

De onderstaande tekst is afkomstig uit een artikel uit een landelijk dagblad van augustus 1997.

………… De enige reden waarom de benzine in Nederland niet veel duurder mag zijn dan in België of in Duitsland is het benzinetoerisme. Hoe groter het prijsverschil, hoe meer kilometers mensen afleggen om goedkoop te tanken aan gene zijde. Stel de prijs in Nederland is 5 gulden per liter en die in Duitsland is 2 gulden per liter. Dan levert een volle tank van 50 liter een voordeel op van 150 gulden. Bij een verbruik van 1 op 10 betaalt een benzinetoerist 20 cent per kilometer aan benzine (de Duitse prijs) en kan hij voor het uitgespaarde bedrag 750 kilometer rijden, dat is 375 km heen en weer. Bij een dergelijk prijsverschil zou zelfs iemand uit Den Helder nog in Duitsland kunnen gaan tanken, ware het niet dat hij met een halfvolle tank zou moeten vertrekken om de grens te halen en met een half lege thuis zou komen …………..

Om meer inzicht te krijgen in de voor- en nadelen van 'tanken in het buitenland' bekijken we in de vragen 42 en 43 een vereenvoudigd voorbeeld:
Jan gebruikt zijn auto voor het doen van boodschappen en voor het afleggen van familiebezoekjes in de directe omgeving. Jan woont op 200 km afstand van het dichtstbijzijnde buitenlandse tankstation. Hij maakt een aparte rit als hij in het buitenland gaat tanken. Als hij in Nederland tankt, hoeft hij daar niet extra voor te rijden. Hij rijdt 1 op 10, dat wil zeggen dat zijn auto met 1 liter benzine 10 km rijdt. Als hij tankt, tankt hij altijd precies 50 liter.

Ga uit van de in het artikel genoemde benzineprijzen.
Jan redeneert op de manier van het artikel: "mijn voordeel is 3 gulden per liter; zelfs als ik daar de kosten van het heen en weer rijden van aftrek, heb ik nog voordeel".

42 Laat met een berekening zien dat het voordeel van Jan per keer dat hij in het buitenland gaat tanken volgens deze redenering 70 gulden bedraagt.

Jan merkt al snel dat er iets mis is met zijn redenering. Hij is meer geld kwijt dan toen hij in Nederland tankte. Om een eerlijke vergelijking te maken tussen tanken in Nederland en tanken in het buitenland moet hij voor beide situaties de kosten berekenen per gebruikskilometer. Een gebruikskilometer is elke afgelegde kilometer die niet gereden wordt om te tanken. In Jans geval is er dus sprake van het afleggen van gebruikskilometers bij bijvoorbeeld familiebezoekjes of boodschappen doen.

43 Hoe groot is het voordeel per gebruikskilometer bij tanken in Nederland vergeleken met tanken in het buitenland voor Jan? Licht je antwoord toe met een berekening.

We bekijken nu een wat algemenere situatie: de benzineprijs in Nederland noemen we N (in gulden per liter), de benzineprijs in het buitenland noemen we B (in gulden per liter) en de afstand tot het dichtstbijzijnde buitenlandse tankstation noemen we x (in km).

©ThiemeMeulenhoff

Voor het voordeel bij tanken in het buitenland V (in gulden) per gebruikskilometer geldt dan:

$$V = 0{,}08 \cdot N - \frac{25 \cdot B}{312{,}5 - x}$$

Hierbij gaan we ervan uit dat:
- auto's 1 op 12,5 rijden: elke auto rijdt 12,5 km op 1 liter benzine;
- een eigenaar van een auto bij een tankbeurt altijd 50 liter tankt;
- een eigenaar van een auto altijd een aparte rit maakt om in het buitenland te tanken;
- een eigenaar van een auto niet extra hoeft te rijden om in Nederland te tanken.

44 Toon aan dat deze formule juist is.

Men wil de benzineprijs in Nederland zodanig vaststellen dat er geen voordeel bij tanken in het buitenland is voor mensen die 15 kilometer of verder van het dichtstbijzijnde buitenlandse tankstation wonen. De benzineprijs in Nederland is dan een vast percentage hoger dan de benzineprijs in het buitenland ongeacht de benzineprijs in het buitenland.

45 Toon dat aan.

De literprijs van benzine verandert met grote regelmaat. Daarmee verandert ook de afstand tot het dichtstbijzijnde tankstation in het buitenland waarbij er geen voordeel of nadeel is om daar te gaan tanken.

46 Toon aan dat uit $V = 0{,}08 \cdot N - \frac{25 \cdot B}{312{,}5 - x}$ volgt dat deze afstand gelijk is aan $312{,}5 \cdot \left(1 - \frac{B}{N}\right)$.

Gevoelstemperatuur

Wanneer de temperatuur buiten 19 °C is en er geen wind staat, dan ervaren we dat als een lekkere temperatuur. Als er echter bij een temperatuur van 19 °C een flinke wind staat, dan vinden we het helemaal niet meer behaaglijk. Door de wind koelt het lichaam sneller af waardoor je het gevoel krijgt dat het kouder is dan in werkelijkheid: de **gevoelstemperatuur** is in dat geval lager dan de werkelijke temperatuur.
De gevoelstemperatuur wordt lager naarmate de windsnelheid toeneemt. In deze opgave bekijken we een tweetal modellen waarbij de gevoelstemperatuur wordt bepaald aan de hand van de werkelijke temperatuur en de windsnelheid.
Het ene model is in 1948 gemaakt door de meteoroloog Court.
De formule die bij dit model hoort is als volgt:

$$G_C = 33 + (T - 33) \cdot (0{,}550 - 0{,}0454w + 0{,}417\sqrt{w})$$

In deze formule is G_C de gevoelstemperatuur in °C, T de werkelijke temperatuur in °C en w de windsnelheid in m/s. De formule is geldig voor windsnelheden groter dan 1,8 m/s en voor werkelijke temperaturen beneden 33 °C.

Bij een werkelijke temperatuur van 20 °C en een windsnelheid van 12 m/s hoort een bepaalde gevoelstemperatuur. Die gevoelstemperatuur is gelijk aan de gevoelstemperatuur die hoort bij een werkelijke temperatuur van 16 °C en een lagere windsnelheid.

47 Bereken die lagere windsnelheid.

Het model van Court is niet het eerste model in formulevorm. In 1945 maakten de wetenschappers Siple en Passel al een ander model.
Bij hun model hoort de volgende formule:

$$G_{S\&P} = 33 + (T - 33) \cdot (0{,}474 - 0{,}0454w + 0{,}454\sqrt{w})$$

Hierin is $G_{S\&P}$ de gevoelstemperatuur in °C volgens het model van Siple en Passel; de betekenis van de overige letters is hetzelfde als bij de formule van Court. Ook de formule van Siple en Passel is geldig voor windsnelheden groter dan 1,8 m/s en temperaturen beneden 33 °C.

We willen weten in hoeverre de formule van Court nu eigenlijk verschilt van die van Siple en Passel. In deze opgave beperken we dit onderzoek tot de situatie waarbij de werkelijke temperatuur 0 °C is. In dat geval wordt het verband tussen de windsnelheid en gevoelstemperatuur volgens Siple en Passel gegeven door:

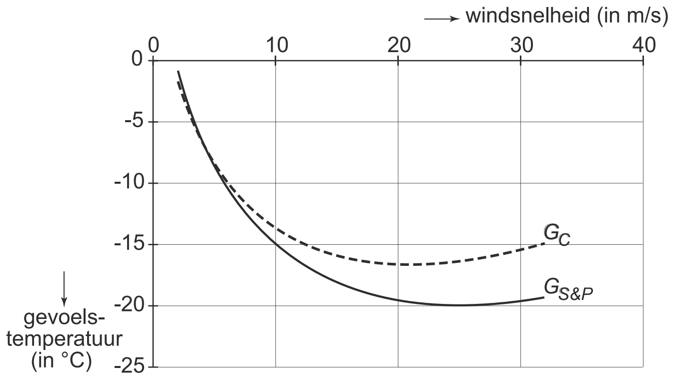
$$G_{S\&P} = 33 - 33 \cdot (0{,}474 - 0{,}0454w + 0{,}454\sqrt{w})$$

Volgens Court wordt in dat geval het verband tussen de windsnelheid en de gevoelstemperatuur gegeven door:

$$G_C = 33 - 33 \cdot (0{,}550 - 0{,}0454w + 0{,}417\sqrt{w})$$

Om een indruk te krijgen zijn in onderstaande figuur de grafieken afgebeeld die bij deze formules horen.

Verband tussen windsnelheid en gevoelstemperatuur volgens Court en volgens Siple en Passel bij een werkelijke temperatuur van 0 °C



Je kunt zien dat de formule van Siple en Passel en de formule van Court voor windsnelheden kleiner dan 6 m/s ongeveer dezelfde gevoelstemperatuur opleveren.

48 Bereken bij welke windsnelheid de laatste twee formules precies dezelfde gevoelstemperatuur geven. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Je kunt in de figuur aan de vorm van de grafiek van de formule van Court zien dat deze formule boven een bepaalde windsnelheid niet meer realistisch kan zijn.

49 Bereken met behulp van de afgeleide functie vanaf welke windsnelheid de formule van Court (bij een temperatuur van 0 °C) in elk geval niet meer realistisch is.
Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

Schroefas

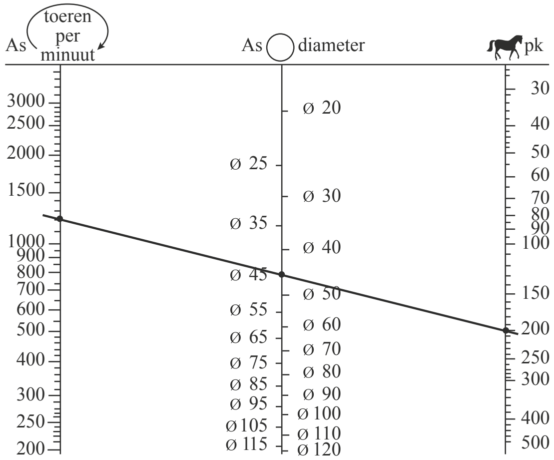
Een belangrijk onderdeel van een boot is de schroefas. Deze as wordt door de motor in beweging gebracht. Daardoor gaat de schroef van het schip draaien en dan kan de boot varen. De motor, de schroefas en de schroef samen noemen we hier het **aandrijfsysteem** van de boot.

het plaatsen van een schroefas

De minimale diameter van de schroefas die nodig is, hangt af van de prestaties die de motor van deze boot kan leveren. In figuur 1 zie je een grafiek om de minimale diameter van de as vast te stellen.
In dit zogenoemde nomogram zie je drie schalen:
- de linkerschaal: het aantal toeren (of omwentelingen) per minuut (tpm). Dit wordt ook wel het toerental genoemd;
- de middelste schaal: de diameter van de schroefas, gemeten in mm;
- de rechterschaal: het vermogen, uitgedrukt in paardenkracht (pk).

Zoals je kunt zien, is elk van de drie schalen niet-lineair.

figuur 1



Wanneer je een lijn trekt door de drie schalen kun je een van de drie waarden bepalen als je de andere twee weet. Zo hoort volgens figuur 1 bij een motor van 200 pk en 1200 tpm een asdiameter van (ten minste) 45 mm.

Python-Drive is een bedrijf dat aandrijfsystemen maakt. Op hun website staat dat alle systemen van het type P60-K (70 pk, 2600 tpm) een asdiameter hebben tussen 30 en 40 mm.

50 Onderzoek met behulp van figuur 1 of de asdiameter van dit type groot genoeg is.

In het voorbeeld in figuur 1 zie je een motor van 200 pk en 1200 tpm met een bijbehorende asdiameter van 45 mm. Er zijn ook wel motoren te vinden met een ander vermogen en een ander toerental waarbij dezelfde asdiameter van 45 mm hoort. Dan valt op dat een groter vermogen een hoger toerental oplevert.

51 Leg uit hoe je dat in figuur 1 kunt zien.

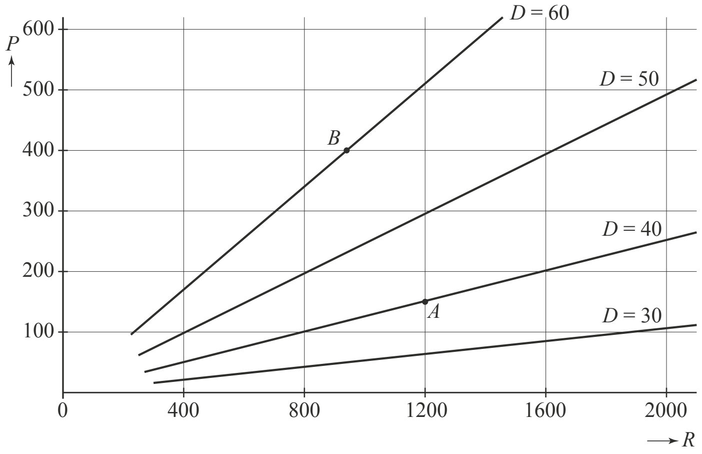
Lloyd's is een organisatie die zich bezighoudt met het opstellen van regels voor de controle op de zeewaardigheid van schepen. Volgens een van deze regels moet de diameter D van de schroefas voldoen aan de volgende formule:

$$D = 79{,}78 \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{R}}$$

In deze formule is D uitgedrukt in mm, het vermogen P uitgedrukt in pk en het toerental R in tpm.

In een tijdschrift dat gaat over aandrijfsystemen kun je figuur 2 tegenkomen. In deze figuur zie je voor enkele waarden van D het verband getekend tussen de bijbehorende waarden van P en R.

figuur 2



In zo'n figuur kan elk aandrijfsysteem met een punt worden weergegeven. Zo hoort het punt A bij het aandrijfsysteem met waarden (1200, 150, 40).

In figuur 2 is punt *B* aangegeven. Bij dit aandrijfsysteem is het vermogen goed af te lezen. De waarde van het toerental is echter niet nauwkeurig af te lezen, maar met behulp van de formule kunnen we deze wel berekenen.

52 Bereken met behulp van de formule het toerental dat bij dit aandrijfsysteem hoort.

In enkele gevallen komt het voor dat de asdiameter al bekend is, bijvoorbeeld wanneer alleen de motor moet worden vervangen. Dan is het handig om de formule $D = 79{,}78 \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{R}}$ anders te schrijven.

We gaan uit van een asdiameter van 30 mm.

53 Herschrijf de formule hierboven zo dat je een formule krijgt waarin *P* uitgedrukt wordt in *R*.

Hints bij hoofdstuk 3

1 Los de vergelijking $V = 120$ op met de rekenmachine.

2 Het vermogen is minimaal als $V' = 0$.

3 Vul $V = 185$ en $s = 0$ in de formule in.

4 Reken de uren en minuten om in seconden.

5 Bereken met behulp van de formule de gemiddelde snelheid van een 52-jarige en ga na of deze snelheid hoog genoeg is om binnen drie uur te finishen.

6 Differentieer *v* en bereken het nulpunt van *v'* met de rekenmachine of algebraïsch.

7 Relatieve toename van armen en handen = $\frac{\text{toename}}{\text{totaal}} \times 100\%$.

8 Gebruik de rekenregel $g^{a+b} = g^a \cdot g^b$.

9 Na differentiëren $M = 66$ invullen.

10 Gebruik de rekenregels $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$, $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ en $\sqrt{A} = A^{0,5}$.

11 Oplossen $D = 0{,}05 \cdot L$.

12 Bereken van beide bomen eerst lengte en diameter en daarmee de houtopbrengst.

13 *t* oplossen uit $D = 0{,}156$.

14 Substitueer de formules voor *L* en *D* in de formule voor *M*. En dan haakjes wegwerken.

15 Coördinaten aflezen in figuur 1 en invullen in $L = p + q\sqrt{j}$.

16 Na een jaar is de gemiddelde lengte van de jongetjes $L = 50 + 30\sqrt{1} = 80$ cm. Bereken de lengtes per maand.

17 Er zitten 12 maanden in een jaar. Hieruit volgt een verband tussen *j* en *m*.

18 Bereken *P* van de eerste powerlifter en gebruik deze uitkomst om *T* van de tweede powerlifter te bepalen.

19 Als A en B dezelfde prestaties leveren, moet gelden: $\frac{T_A}{12 \cdot 50^{0,667}} = \frac{T_B}{12 \cdot 150^{0,667}}$.

20 $P_{Siff} > P_{theoretisch} \Leftrightarrow \frac{T}{408{,}15 - \frac{11\,047}{L^{0,9371}}} > \frac{T}{12 \cdot L^{0,667}}$. Ga na aan welke ongelijkheid de noemers moeten voldoen.

21 Onderzoek voor toenemende *L* de bijdrage van elk onderdeel van de formule.

22 Waar de grafiek het steilste daalt, levert afvallen het meeste op wat betreft prestatieverbetering.

23 Onderzoek teller en noemer apart. Trek een conclusie over de uitkomst van de breuk als geheel.

24 Beginnen bij de laatste formule en terugwerken is het makkelijkst.

25 *TE* speelt geen rol.
Onderzoek stap voor stap wat het gevolg is van een verandering van *LE*.

26 Wat levert de extra informatie op voor de fictieve speler?

27 Bereken van elke speler de winst over drie ronden en bereken hiermee *B*.
Vergelijk de uitkomst met de gegeven grens tussen kansspel en behendigheidsspel.

28 Vul $v = 160$ en $v = 80$ in de formule in.

29 Bereken eerst de snelheid van de tsunami bij de gegeven diepte.

30 Vul voor d_1 en h_1 de waarden van het ontstaansgebied van de tsunami in.

31 Schets de afgeleide van h en leidt hieruit af wat er met h' en h gebeurt bij afnemende diepte.

32 Lees op de grafiek, die begint bij 80 km/uur, de snelheid na 20 meter remmen af.

33 Lees de coördinaten af van twee punten van de grafiek die begint bij 140 km/uur. Vul de coördinaten in de gegeven formule in en bereken a en b.

34 Lees bij elk van de zes grafieken de *beginsnelheid* en de *remweg* af en ga na of c steeds hetzelfde is.

35 Waar bevindt auto G zich als auto W tot stilstand komt?

36 De tijd om een handeling voor de 5e keer te verrichten is de tijd om 5 handelingen te verrichten minus de tijd om vier handelingen te verrichten.

37 Combineer de tabel in de opgave met de tabel van H_n.

38 Onderzoek de grafiek van H_n.

39 Bereken $T_1 + T_2 + ... + T_{10}$ met behulp van de sigmafunctie op de rekenmachine.

40 Bedenk hoe een exponentiele functie waarvan de groeifactor kleiner dan 1 is zich ontwikkelt.

41 T_n is een dalende rij dus $T_1 > T_2 > ... > T_n$.

42 De redenering van Jan klopt niet maar verplaats je even in zijn denkwijze.

43 Deel de prijs voor een volle tank door het aantal gebruikskilometers. Als je in het buitenland gaat tanken, moet je de afstand zowel heen als terug afleggen.

44 Volg de berekening van de vorige opgave, maar nu met variabelen.

45 Als x = 15 km moet de uitkomst van V nul worden.

46 x vrijmaken uit $0{,}08 \cdot N - \frac{25 \cdot B}{312{,}5 - x} = 0$

47 Bereken eerst G_C bij T = 20 °C en w = 12 m/s. Vul daarna deze waarde van G_C en ook T = 16 °C in in de formule en bereken daaruit w.

48 Voer beide formules in de rekenmachine in en gebruik *intersect/snijpunt.*

49 Boven w = 20 m/s is de formule van Court niet meer realistisch want dan zou G_C stijgen bij toenemende w. Nu met de afgeleide berekenen waar G_C minimaal is.

50 Trek in de uitwerkbijlage een lijn door de juiste waarden voor vermogen en toeren per minuut. Lees hierbij de minimale asdiameter af.

51 Bekijk de gegeven lijn. Als het vermogen groter wordt, gaat de lijn scharnieren om 45 mm op de middelste as.

52 Voor punt B zijn de waarden van P en D duidelijk. Gebruik deze om R te berekenen.

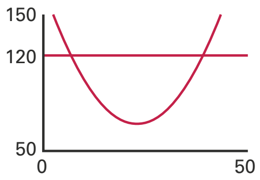
53 Vergelijkbare algebra als in de vorige vraag.

©ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij hoofdstuk 3

Valkparkiet

1 V = 120 Watt dus de vergelijking $120 = 0{,}19s^2 - 8{,}71s + 169{,}72$ moet worden opgelost.
Voer in de rekenmachine in $y_1 = 0{,}19x^2 - 8{,}71x + 169{,}72$ en $y_2 = 120$.



Intersect geeft x = 6,6825... en x = 39,1596... dus bij snelheden van ongeveer 7 km/uur en 39 km/uur is het vermogen van een valkparkiet 120 Watt.

2 $V = 0{,}19s^2 - 8{,}71s + 169{,}72$. Differentiëren geeft $V' = 0{,}38s - 8{,}71$.
Het vermogen is minimaal als $V' = 0 \Leftrightarrow 0{,}38s - 8{,}71 = 0 \Leftrightarrow 0{,}38s = 8{,}71 \Leftrightarrow$
$s = \frac{8{,}71}{0{,}38} = 22{,}91...$ dus bij een snelheid van ongeveer 23 km/uur.

3 V = 185 en s = 0 invullen geeft: $185 = p \cdot (0 - 8)(0 - 34) + 150 \Leftrightarrow 185 = p \cdot 272 + 150 \Leftrightarrow$

$35 = p \cdot 272 \Leftrightarrow p = \frac{35}{272} \Rightarrow$

$V = \frac{35}{272} \cdot (s - 8)(s - 34) + 150 \Leftrightarrow V = \frac{35}{272} \cdot (s^2 - 42s + 272) + 150 \Leftrightarrow$

$V = \frac{35}{272}s^2 - \frac{735}{136}s + 35 + 150 \Leftrightarrow V = \frac{35}{272}s^2 - \frac{735}{136}s + 185$

Er wordt niet naar exacte waarden gevraagd dus ook een vorm met afgeronde waarden is toegestaan, bijvoorbeeld: $V = 0{,}13s^2 - 5{,}42s + 185$

Marathonloopsters

4 2 uur, 43 minuten en 32 seconden = 2 × 3600 + 43 × 60 + 32 = 9812 seconden.
De gemiddelde snelheid van deze loopster is $\frac{42\,195}{9812} \approx 4{,}3$ m/s.

5 Vul de leeftijd x = 52 in de formule $v = 2{,}836 \cdot x^{0{,}665} - 1{,}390 \cdot x^{0{,}818}$ in.
Dit geeft een gemiddelde snelheid $v = 2{,}836 \cdot 52^{0{,}665} - 1{,}390 \cdot 52^{0{,}818} = 4{,}037...$ m/s.
Met deze gemiddelde snelheid zou zij er $\frac{42\,195}{4{,}037...} \approx 10\,451$ seconden over doen en dat is 2 uur, 54 minuten en 11 seconden. Volgens het model kan een 52-jarige marathonloopster de marathon binnen drie uur lopen.
andere manier
Om een marathon in 3 uur (= 3 × 3600 = 10 800 seconden) te lopen, is een gemiddelde snelheid nodig van $\frac{42\,195}{10\,800} \approx 3{,}907$ m/s nodig. Volgens de formule kan een 52-jarige marathonloopster een gemiddelde snelheid van 4,037... m/s halen, dus volgens het model is het mogelijk.

©ThiemeMeulenhoff

6 $v = 2{,}836 \cdot x^{0{,}665} - 1{,}390 \cdot x^{0{,}818} \Rightarrow v' = 2{,}836 \cdot 0{,}665 \cdot x^{-0{,}335} - 1{,}390 \cdot 0{,}818 \cdot x^{-0{,}182} \Rightarrow$

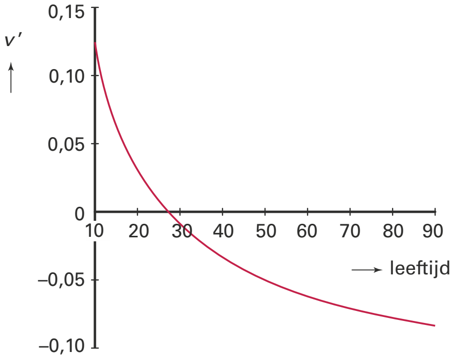
$v' = 1{,}88594 \cdot x^{-0{,}335} - 1{,}13702 \cdot x^{-0{,}182}$

Voer in de rekenmachine in

$y_1 = 1{,}88594 \cdot x^{-0{,}335} - 1{,}13702 \cdot x^{-0{,}182}$

en bereken het nulpunt met de optie *zero*.

Dit geeft: $x \approx 27{,}3$ dus op 27-jarige leeftijd presteren marathonloopsters (gemiddeld) het beste.



Het nulpunt van de afgeleide kan ook algebraïsch worden berekend door elke term met $x^{0{,}335}$ te vermenigvuldigen:

$1{,}88594 \cdot x^{-0{,}335} - 1{,}13702 \cdot x^{-0{,}182} = 0 \Leftrightarrow$

$1{,}88594 \cdot x^{0} - 1{,}13702 \cdot x^{0{,}153} = 0 \Leftrightarrow$

$-1{,}13702 \cdot x^{0{,}153} = -1{,}88594 \Leftrightarrow$

$x^{0{,}153} = \dfrac{-1{,}88594}{-1{,}13702} \Leftrightarrow$

$x = \sqrt[0{,}153]{\dfrac{1{,}88594}{1{,}13702}} \approx 27{,}3$

Lichaamsoppervlak

7 De toename van het aandeel van armen en handen is $21{,}0 - 18{,}15 = 2{,}85$.

De relatieve toename van het aandeel van armen en handen is $\dfrac{2{,}85}{18{,}15} \cdot 100 \approx 15{,}7\%$.

De toename van het aandeel van benen en voeten is $38{,}8 - 31{,}65 = 7{,}15$.

De relatieve toename van het aandeel van benen en voeten is $\dfrac{7{,}15}{31{,}65} \cdot 100 \approx 22{,}6\%$.

Het aandeel van benen en voeten is relatief het meest toegenomen.

8 $S_{\text{Dubois}(2)} = 0{,}007184 \cdot (2L)^{0{,}725} \cdot (8M)^{0{,}425} = 0{,}007184 \cdot 2^{0{,}725} \cdot L^{0{,}725} \cdot 8^{0{,}425} \cdot M^{0{,}425} =$

$0{,}007184 \cdot L^{0{,}725} \cdot M^{0{,}425} \cdot 2^{0{,}725} \cdot 8^{0{,}425} = S_{\text{Dubois}(1)} \cdot 2^{0{,}725} \cdot 8^{0{,}425} = S_{\text{Dubois}(1)} \cdot 4$ dus

bij verdubbeling van de lengtematen wordt de lichaamsoppervlakte vier keer zo groot.

Je kunt zelfs bewijzen dat $2^{0{,}725} \cdot 8^{0{,}425}$ *exact 4 is, dus niet afgerond:*

$2^{0{,}725} \cdot 8^{0{,}425} = 2^{0{,}725} \cdot (2^3)^{0{,}425} = 2^{0{,}725} \cdot 2^{1{,}275} = 2^2 = 4$

9 $S_{\text{Dubois}} = 0{,}303787 \cdot M^{0{,}425} \Rightarrow S'_{\text{Dubois}} = 0{,}303787 \cdot 0{,}425 \cdot M^{-0{,}575} \approx 0{,}129109 \cdot M^{-0{,}575}$

$M = 66$ invullen: $S'_{\text{Dubois}}(66) = 0{,}303787 \cdot 0{,}425 \cdot 66^{-0{,}575} \approx 0{,}0116$

Bij een volwassen vrouw met een lengte van 1,75 m en een gewicht van 66 kg groeit de lichaamsoppervlakte met 0,0116 m^2 per kg gewichtstoename (116 cm^2 per kg).

10 Met behulp van de rekenregels $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$, $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ en $\sqrt{A} = A^{0{,}5}$ volgt:

$S_{\text{Mosteller}} = \sqrt{\dfrac{1}{3600} \cdot L \cdot M} = \sqrt{\dfrac{1}{3600}} \cdot \sqrt{L} \cdot \sqrt{M} = \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{3600}} \cdot \sqrt{L} \cdot \sqrt{M} = \dfrac{1}{60} \cdot L^{0{,}5} \cdot M^{0{,}5}$

Labironia

11 De formules zijn geldig vanaf het moment dat $D = 0{,}05 \cdot L$.

$0{,}0042 \cdot t + 0{,}072 = 0{,}05 \cdot 0{,}75 \cdot t \Leftrightarrow 0{,}0042 \cdot t + 0{,}072 = 0{,}0375 \cdot t \Leftrightarrow$

$0{,}0333 \cdot t = 0{,}072 \Leftrightarrow t = 2{,}162...$.

Ongeveer 2 jaar na het plantmoment zijn de formules geldig.

12 Na 8 jaar is de lengte van de boom $L = 0{,}75 \cdot 8 = 6$ meter en de diameter is $D = 0{,}0042 \cdot 8 + 0{,}072 = 0{,}1056$ meter.

De houtopbrengst is dan $M = 0{,}16 \cdot (0{,}1056)^2 \cdot 6 = 0{,}0107...$ m^3.

Na 15 jaar is de lengte van de boom $L = 0{,}75 \cdot 15 = 11{,}25$ meter en de diameter is $D = 0{,}0042 \cdot 15 + 0{,}072 = 0{,}135$ meter.

De houtopbrengst is dan $M = 0{,}16 \cdot (0{,}135)^2 \cdot 11{,}25 = 0{,}0328...$ m^3.

Het verschil is $0{,}0328... - 0{,}0107... \approx 0{,}022$ m^3.

13 De laatste bomen worden gekapt als $D = 0{,}156$ meter

dus $0{,}0042 \cdot t + 0{,}072 = 0{,}156 \Leftrightarrow$

$0{,}0042 \cdot t = 0{,}084 \Leftrightarrow t = 20$ jaar.

Na 20 jaar is de lengte $L = 0{,}75 \cdot 20 = 15$ meter.

14 De formules $L = 0{,}75 \cdot t$ en $D = 0{,}0042 \cdot t + 0{,}072$ substitueren in $M = 0{,}16 \cdot D^2 \cdot L$:

$M = 0{,}16 \cdot (0{,}0042 \cdot t + 0{,}072)^2 \cdot (0{,}75 \cdot t) =$

$(0{,}00001764 \cdot t^2 + 0{,}0006048 + 0{,}005184) \cdot (0{,}12 \cdot t) =$

$0{,}0000021168 \cdot t^3 + 0{,}000072576 \cdot t^2 + 0{,}00062208 \cdot t$

Benaderd: $a \approx 2 \cdot 10^{-6}$, $b \approx 7{,}3 \cdot 10^{-5}$ en $c \approx 6{,}2 \cdot 10^{-4}$

Lengte van jongetjes

15 Coördinaten aflezen in figuur 1 en invullen in $L = p + q\sqrt{j}$.

Op leeftijd $j = 0$ jaar is de lengte 50 cm $\Rightarrow$ $50 = p + q\sqrt{0} \Leftrightarrow p = 50$.

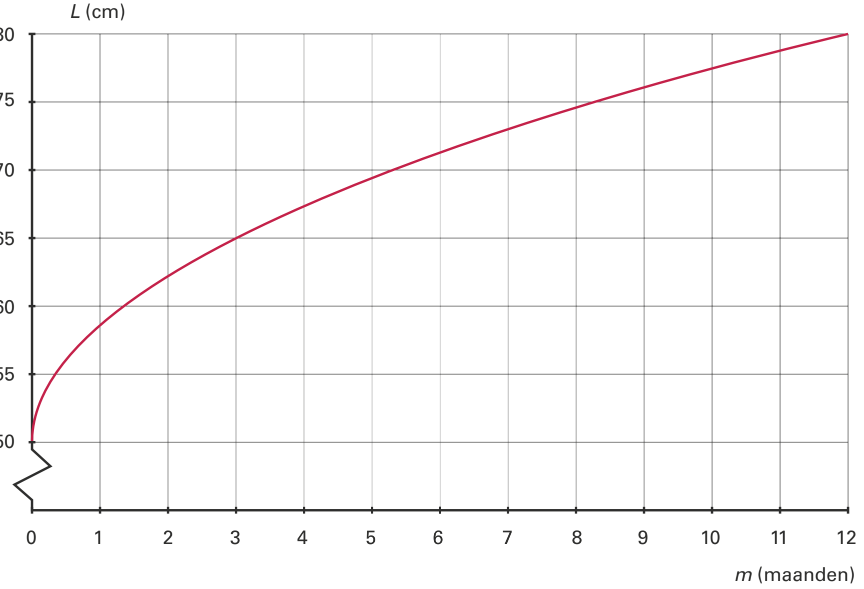
Op leeftijd $j = 9$ jaar is de lengte 140 cm $\Rightarrow$ $140 = 50 + q\sqrt{9} \Leftrightarrow 3q = 90 \Leftrightarrow q = 30$.

16 Tabel voor de eerste 12 maanden:

j	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{11}{12}$	1
L	50	58,7	62,2	65	67,3	69,4	71,2	72,9	74,5	76,0	77,4	78,7	80

De grafiek staat op de volgende bladzijde.

grafiek bij vraag 16



17 Omdat er 12 maanden in een jaar zitten, geldt $m = 12 \cdot j \Leftrightarrow j = \frac{1}{12}m \Rightarrow$

$L = 50 + 30\sqrt{j} \Leftrightarrow L = 50 + 30\sqrt{\frac{1}{12}m}$

andere manier

De formule moet van de vorm $L = r + s\sqrt{m}$ zijn waarbij r en s op dezelfde wijze uit de grafiek worden afgeleid als dat bij de eerste vraag van deze opgave is gebeurd.

Op leeftijd $m = 0$ maanden is de lengte 50 cm $\Rightarrow 50 = r + s\sqrt{0} \Leftrightarrow r = 50$.

Op leeftijd $m = 12$ maanden is de lengte 80 cm $\Rightarrow 80 = 50 + s\sqrt{12} \Leftrightarrow s = \frac{30}{\sqrt{12}} \approx 8{,}66$.

Dus de formule is $L = 50 + 8{,}66\sqrt{m}$.

De beide gevonden formules zijn gelijk want:

$$L = 50 + 30\sqrt{\frac{1}{12}m} = 50 + 30\sqrt{\frac{1}{12}} \cdot \sqrt{m} = 50 + 30\frac{1}{\sqrt{12}} \cdot \sqrt{m} =$$

$$50 + \frac{30}{\sqrt{12}} \cdot \sqrt{m} = 50 + 8{,}66 \cdot \sqrt{m}$$

Powerliften

18 Voor een powerlifter met $L = 70$ kg en $T = 150$ kg geldt:

$P_{\text{theoretisch}} = \frac{150}{12 \cdot 70^{0{,}667}} \approx 0{,}735$

Als voor een andere powerlifter met $L = 100$ kg de uitkomst van $P_{\text{theoretisch}}$ ook 0,735 moet zijn, dan moet T berekend worden uit: $0{,}735 = \frac{T}{12 \cdot 100^{0{,}667}} \Leftrightarrow$

$T = 0{,}735 \cdot 12 \cdot 100^{0{,}667} \approx 190$

De powerlifter van 100 kg moet 190 kg tillen om dezelfde prestatie te leveren.

19 Als A en B dezelfde prestaties leveren, moet gelden: $\frac{T_A}{12 \cdot 50^{0{,}667}} = \frac{T_B}{12 \cdot 150^{0{,}667}} \Leftrightarrow$

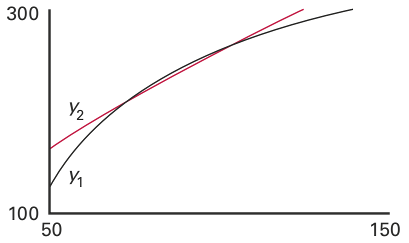
$T_B = 12 \cdot 150^{0{,}667} \cdot \frac{T_A}{12 \cdot 50^{0{,}667}} = \frac{12 \cdot 150^{0{,}667}}{12 \cdot 50^{0{,}667}} \cdot T_A \Leftrightarrow T_B \approx 2{,}08 \cdot T_A$ dus powerlifter B moet een ruim twee keer zo groot gewicht tillen als A voor dezelfde prestatie.

20 Voor welke waarden van L geldt $P_{\text{Siff}} > P_{\text{theoretisch}}$, dus $\frac{T}{408{,}15 - \frac{11\,047}{L^{0{,}9371}}} > \frac{T}{12 \cdot L^{0{,}667}}$?

De breuken in beide formules hebben dezelfde teller, dus de linker breuk is groter dan de rechter als de linker noemer kleiner is dan de rechter noemer.

Opgelost moet dan worden: $408{,}15 - \frac{11\,047}{L^{0{,}9371}} < 12 \cdot L^{0{,}667}$

Voer nu in de rekenmachine in $y_1 = 408{,}15 - \frac{11\,047}{x^{0{,}9371}}$ en $y_2 = 12 \cdot x^{0{,}667}$.



De snijpunten kunnen worden berekend met *intersect*. Dit geeft $x \approx 72{,}9$ en $x \approx 104{,}2$.
Met behulp van de grafiek kan worden afgelezen:
$P_{\text{Siff}} > P_{\text{theoretisch}} \Leftrightarrow 50 \le L < 72{,}9$ en voor $L > 104{,}2$

21 Als L toeneemt, neemt ook $L^{0{,}9371}$ toe. Maar dan neemt $\frac{11\,047}{L^{0{,}9371}}$ af. Er moet dan minder van 408,15 afgetrokken worden, dus de noemer van P_{Siff} wordt groter.

Maar dan wordt $P_{\text{Siff}} = \frac{80}{408{,}15 - \frac{11\,047}{L^{0{,}9371}}}$ juist weer kleiner.

Conclusie: als L toeneemt, neemt P_{Siff} af.

22 Een powerlifter die afvalt, beweegt zich over de grafiek in de opgave naar links.

Eerst de formule herleiden: $P = \frac{120}{12 \cdot L^{0{,}667}} = 10 \cdot \frac{1}{L^{0{,}667}} = 10 \cdot L^{-0{,}667}$

Differentiëren van P geeft: $P' = 10 \cdot -0{,}667 \cdot L^{-1{,}667} = \frac{-6{,}67}{L^{1{,}667}}$

Voor de powerlifter van 65 kg geldt: $P' = \frac{-6{,}67}{65^{1{,}667}} \approx -0{,}006$.

Voor de powerlifter van 105 kg geldt: $P' = \frac{-6{,}67}{105^{1{,}667}} \approx -0{,}003$.

De prestatie van een powerlifter van 65 kg daalt dus het snelst als zijn gewicht toeneemt, maar omgekeerd stijgt zijn prestatie ook het snelst als zijn gewicht afneemt.

Behendigheid

23 Gegeven is de formule: $B = \frac{LE}{LE + TE}$

1. *LE* is nooit negatief dus de teller van de breuk is 0 of hoger.
   LE en *TE* zijn beide niet negatief en ook niet gelijktijdig 0, dus $LE + TE$ is groter dan 0.
   De uitkomst van *B* is dan 0 of hoger, dus nooit negatief.
2. Als $TE = 0$ dan $B = \frac{LE}{LE} = 1$.
   Als $TE > 0$ dan $LE < LE + TE$ dus de teller van *B* is kleiner dan de noemer $\Rightarrow$ $B < 1$
   In alle gevallen geldt: $B \leq 1$
3. *LE* is voor beide spelen gelijk. De kleinste *TE* levert dan de kleinste noemer en, omdat de tellers gelijk zijn, de grootste uitkomst van *B*.

24 *Beginnen bij de laatste formule en terugwerken is gemakkelijker dan andersom.*

$$B = 1 - \frac{TE}{LE + TE} = \frac{LE + TE}{LE + TE} - \frac{TE}{LE + TE} = \frac{LE + TE - TE}{LE + TE} = \frac{LE}{LE + TE}$$

25 Twee spellen hebben een even grote *TE*.
Een groter leereffect *LE* betekent een grotere noemer $LE + TE$. Dat betekent een kleinere uitkomst voor de breuk $\frac{TE}{LE + TE}$ maar dan zal $B = 1 - \frac{TE}{LE + TE}$ juist weer groter zijn.
Bij gelijke *TE* zal een grotere *LE* leiden tot een grotere *B*.

26 Het toevalseffect *TE* is het verschil tussen de winst van een fictieve speler en die van een ervaren speler. De fictieve speler is een ervaren speler die ook informatie heeft over toevalselementen in het spel. Naarmate de toevalselementen belangrijker zijn, zal deze extra informatie de ervaren speler meer voordeel, dus meer winst, opleveren ten opzichte van een gewone ervaren speler.

27 winst van de beginner = –28 + 30 – 32 = –30 euro
winst van de ervaren speler = –11 + 90 + 1 = 80 euro
winst van de fictieve speler = 10 + 161 + 219 = 390 euro
Hieruit volgt:
TE = winst van de fictieve speler – winst van de ervaren speler = 390 – 80 = 310
LE = winst van de ervaren speler – winst van de beginner = 80 – (–30) = 110
Deze laatste twee uitkomsten invullen in de formule voor *B geeft:*

$B = \frac{110}{110 + 310} \approx 0{,}26$.

Deze uitkomst is groter dan 0,20 dus volgens de methode van Borm en Van der Genugten is 'Texas Hold'Em' geen kansspel maar een behendigheidsspel.

Tsunami

28 $v = 160$ km/uur als $160 = 11{,}3\sqrt{d} \Leftrightarrow \sqrt{d} = \frac{160}{11{,}3} \Rightarrow d = \left(\frac{160}{11{,}3}\right)^2 \approx 200$ m.

$v = 80$ km/uur als $80 = 11{,}3\sqrt{d} \Leftrightarrow \sqrt{d} = \frac{80}{11{,}3} \Rightarrow d = \left(\frac{80}{11{,}3}\right)^2 \approx 50$ m.

29 Bij een diepte van $d = 3000$ meter is de snelheid van de tsunami

$v = 11{,}3\sqrt{3000} = 618{,}9...$ km/uur.

De tsunami legt 150 km af in $\frac{150}{618{,}9...} = 0{,}242...$ uur en dat is $0{,}242... \times 60 \approx 15$ minuten.

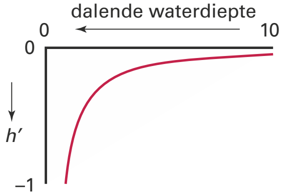
30 Als $d_1 = 1000$ meter en $h_1 = 0{,}6$ meter in het ontstaansgebied van de tsunami, dan geldt voor een andere plek met waterhoogte h_2 en diepte d_2 de volgende formule:

$$h_2 = \left(\frac{1000}{d_2}\right)^{0{,}25} \cdot 0{,}6 \Leftrightarrow h_2 = \frac{1000^{0{,}25}}{d_2^{\,0{,}25}} \cdot 0{,}6 \Leftrightarrow h_2 = 1000^{0{,}25} \cdot 0{,}6 \cdot d_2^{-0{,}25} \Leftrightarrow$$

$h_2 \approx 3{,}37 \cdot d_2^{-0{,}25}$ en dat is de gezochte formule.

31 Differentiëren geeft: $h' = 3{,}37 \cdot -0{,}25 \cdot d^{-1{,}25} = -0{,}8425 \cdot d^{-1{,}25}$

Een schets van de grafiek van *h'* staat hiernaast
Uit de schets blijkt: als de waterdiepte *d* toeneemt, wordt *h'* steeds minder negatief dus dan wordt de afname van de golfhoogte *h* steeds kleiner.
Als je de grafiek van rechts naar links leest, geldt de redenering andersom: als de waterdiepte *d* afneemt, wordt *h'* steeds sterker negatief dus dan wordt de toename van de golfhoogte *h* steeds groter.



Remweg

32 Bij een beginsnelheid van 80 km/uur is er na 20 meter remmen nog een snelheid van 47 km/uur (afgelezen in figuur 1). Dit is $\frac{47}{80} \cdot 100 = 58{,}75\%$ van de beginsnelheid dus de daling is dan 41,25%.

33 In figuur 1 is te zien dat de punten (0, 140) en (92, 0) op de grafiek van $v = \sqrt{a + b \cdot x}$ liggen. Invullen van (0, 140) geeft: $140 = \sqrt{a + b \cdot 0} \Leftrightarrow \sqrt{a} = 140 \Leftrightarrow a = 140^2 = 19\,600$
Invullen van (92, 0) en $a = 19\,600$ geeft:

$0 = \sqrt{19\,600 + b \cdot 92} \Rightarrow 19\,600 + b \cdot 92 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{-19\,600}{92} \approx -213$

De twee gevraagde constanten zijn dus $a = 19\,600$ en $b \approx -213$.

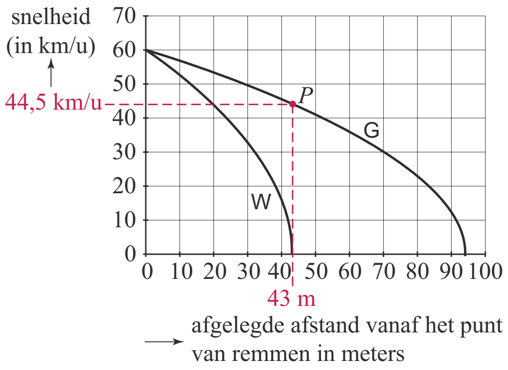
34 Als de remweg evenredig is met het kwadraat van de beginsnelheid v_0, dan moet gelden $remweg = c \cdot v_0^2 \Leftrightarrow \frac{remweg}{(beginsnelheid)^2} = constant$

De remweg bij de zes genoemde beginsnelheden lezen we af in figuur 1 en daarna berekenen we met de rekenmachine telkens $\frac{remweg}{(beginsnelheid)^2}$:

beginsnelheid	40	60	80	100	120	140
remweg	7,5	17	30	47	68	92
$\frac{remweg}{(beginsnelheid)^2}$	0,004688	0,004722	0,004688	0,0047	0,004722	0,004694

De zes waarden voor $\frac{remweg}{(beginsnelheid)^2}$ zijn allemaal ongeveer 0,0047, dus de remweg is inderdaad evenredig met het kwadraat van de beginsnelheid, dus $remweg = c \cdot v_0^2$.
Afgerond op drie decimalen is de constante *c* gelijk aan 0,005.

35 *In de grafiek van figuur 2 staat langs de horizontale as niet de tijd maar de afstand. De verticale stippellijn in figuur 2 geeft dus geen gelijktijdigheid aan.*
Auto G rijdt vanaf het moment van remmen voortdurend harder dan auto W.



Op het tijdstip waarop auto W na 43 meter tot stilstand komt, heeft auto G al méér dan 43 meter gereden dus is auto G het rode punt P in de figuur al gepasseerd.
De snelheid van auto G is op dit tijdstip zeker kleiner dan 44,5 km per uur. Cynthia heeft dus gelijk.

Al doende leert men

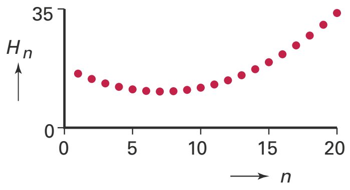
36 De eerste vier handelingen duren gemiddeld 12,1 en samen $4 \cdot 12{,}1 = 48{,}4$ min.
De eerste vijf handelingen duren gemiddeld 11,3 en samen $5 \cdot 11{,}3 = 56{,}5$ min.
De vijfde handeling duurt $56{,}5 - 48{,}4 = 8{,}1$ minuten.

37 Voer in de rekenmachine in $y_1 = 0{,}14x^2 - 2x + 17{,}8$. Maak een tabel bij y_1 en voeg deze toe aan de tabel in de opgave:

aantal keren dat handeling A is verricht (n)	1	2	3	4	5	6
gemiddelde handelingstijd in minuten	16	14,4	13,1	12,1	11,3	10,7
H_n	15,94	14,36	13,06	12,04	11,3	10,84

Het grootste verschil is 0,14 (namelijk als $n = 6$).

38 $H_n = 0{,}14n^2 - 2n + 17{,}8$ is een kwadratische functie. De grafiek van H_n bestaat uit punten die op een parabool liggen. Voor $n = 1$ t/m 7 daalt H_n maar vanaf $n = 8$ gaat H_n steeds sneller stijgen.



Dit zou betekenen dat de gemiddelde handelingstijd bij 8 of meer handelingen weer gaat toenemen en dat stemt niet overeen met de werkelijkheid.

39 De gemiddelde handelingstijd na het 10 keer uitvoeren van handeling A is gelijk aan

$$\frac{T_1 + T_2 + \ldots + T_{10}}{10} = \frac{\sum_{n=1}^{10} T_n}{10} = \frac{\sum_{n=1}^{10} (6 + 14{,}7 \cdot 0{,}68^n)}{10} = \frac{90{,}577\ldots}{10} \approx 9{,}1 \text{ minuten.}$$

40 Als n toeneemt, daalt $0{,}68^n$ (asymptotisch) naar nul, dus ook $14{,}7 \cdot 0{,}68^n$ daalt (asymptotisch) naar nul. Dan daalt $T_n = 6 + 14{,}7 \cdot 0{,}68^n$ naar 6.
De grens waar T_n niet onder kan komen is 6 minuten.

41 T_n is een dalende rij dus elke volgende term is kleiner dan zijn voorganger dus $T_1 > T_2 > \ldots > T_n$ en hieruit volgt $T_1 + T_2 + \ldots + T_n > n \cdot T_n$ en dus ook

$$H_n = \frac{T_1 + T_2 + \ldots + T_n}{n} > \frac{n \cdot T_n}{n} = T_n \Leftrightarrow H_n > T_n$$

Opmerking 1 is juist: de grafiek van H_n ligt altijd boven die van T_n.

De handelingstijd voor de n-de handeling T_n daalt naar de grens 6 minuten (zie vorige vraag), maar dan zal ook de gemiddelde handelingstijd naar de 6 minuten dalen.
Opmerking 2 is juist: de grafieken van H_n en T_n zullen uiteindelijk onbeperkt dicht bij elkaar komen.

Tanken

42 De redenering van Jan is als volgt: ‘als ik 50 liter tank in het buitenland ben ik $50 \cdot 3 = 150$ gulden goedkoper uit dan bij tanken in Nederland. Maar om te tanken in het buitenland moet ik 400 km afleggen. Bij een verbruik van 1 liter op 10 km kost mij dat 40 liter benzine waarvoor ik in het buitenland 80 gulden betaal.
Mijn voordeel is dus $150 - 80 = 70$ gulden.’

43 Als Jan in Nederland tankt, kan hij met een tank van 50 liter 500 gebruikskilometers rijden. Een volle tank kost in Nederland 250 gulden, dus de prijs per gebruikskilometer is dan 0,5 gulden.
Als Jan in het buitenland tankt moet hij 400 kilometer reizen om te tanken dus dan houdt hij 100 gebruikskilometers over. Een volle tank kost in het buitenland 100 gulden, dus de prijs per gebruikskilometer is 1 gulden.
Tanken in Nederland geeft een voordeel van 0,5 gulden per gebruikskilometer.

44 Een volle tank kost in Nederland $50 \cdot N$ gulden en daarmee kan $50 \cdot 12{,}5 = 625$ gebruikskilometer gereden worden. De prijs per gebruikskilometer is $\frac{50 \cdot N}{625} = 0{,}08 \cdot N$.
Een volle tank kost in het buitenland $50B$ gulden en daarmee kan ook 625 kilometer gereden worden, maar het aantal gebruikskilometers is $625 - 2x$.
De prijs per gebruikskilometer is $\frac{50 \cdot B}{625 - 2x} = \frac{25 \cdot B}{312{,}5 - x}$.
Het voordeel van tanken in het buitenland is $V = 0{,}08 \cdot N - \frac{25 \cdot B}{312{,}5 - x}$ in gulden per gebruikskilometer.

45 Als $x = 15$ km moet de uitkomst van V nul worden:

$$0{,}08 \cdot N - \frac{25 \cdot B}{312{,}5 - 15} = 0 \Leftrightarrow 0{,}08 \cdot N = \frac{25 \cdot B}{297{,}5} \Leftrightarrow N = \frac{25 \cdot B}{0{,}08 \cdot 297{,}5} = 1{,}0504\ldots \cdot B$$

De prijs in Nederland moet dan altijd ongeveer 5,04% hoger zijn dan in het buitenland.

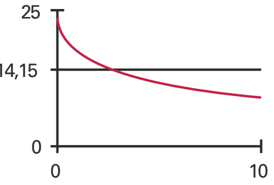
46 Geen voordeel betekent $V = 0$. Nu x vrijmaken uit $0{,}08 \cdot N - \frac{25 \cdot B}{312{,}5 - x} = 0 \Rightarrow$

$$312{,}5 - x = \frac{25 \cdot B}{0{,}08 \cdot N} \Leftrightarrow 312{,}5 - x = 312{,}5 \cdot \frac{B}{N} \Leftrightarrow$$

$$x = 312{,}5 - 312{,}5 \cdot \frac{B}{N} = 312{,}5\left(1 - \frac{B}{N}\right)$$

Gevoelstemperatuur

47 Bij werkelijke temperatuur $T = 20$ °C en windsnelheid $w = 12$ m/s geldt:
$G_C = 33 + (20 - 33) \cdot (0{,}550 - 0{,}0454 \cdot 12 + 0{,}417\sqrt{12}) \approx 14{,}15$ m/s
Bij $T = 16$ en $G_C = 14{,}15$ moet nu w opgelost worden uit de vergelijking:
$33 + (16 - 33) \cdot (0{,}550 - 0{,}0454 \cdot w + 0{,}417\sqrt{w}) \approx 14{,}15$
Voer nu in de rekenmachine in $y_1 = 33 + (16 - 33) \cdot (0{,}550 - 0{,}0454 \cdot x + 0{,}417\sqrt{x})$
en $y_2 = 14{,}15$.



Intersect geeft $x = 2{,}6537...$ dus die lagere windsnelheid is $w \approx 2{,}65$ m/s.

48 Voer in de rekenmachine $y_1 = 33 - 33 \cdot (0{,}474 - 0{,}0454x + 0{,}454\sqrt{x})$ en
$y_2 = 33 - 33 \cdot (0{,}550 - 0{,}0454x + 0{,}417\sqrt{x})$ met hetzelfde venster als in de figuur in de opgave. De optie *intersect/snijpunt* geeft $x = 4{,}2191...$
De formules $G_{S\&P}$ en G_C dezelfde uitkomst voor $w \approx 4{,}22$ m/s (in twee decimalen nauwkeurig).

49 In de figuur in de opgave is te zien dat de grafiek van G_C vanaf $w \approx 20$ m/s stijgt bij toenemende windsnelheden. Dat is niet realistisch. Een nauwkeuriger w-waarde van het minimum kan met behulp van de afgeleide functie bepaald worden.

$$G_C = 33 - 33 \cdot (0{,}550 - 0{,}0454w + 0{,}417\sqrt{w}) = 33 - 18{,}15 + 1{,}4982w - 13{,}761\sqrt{w} \Rightarrow$$

$$G_C = 14{,}85 + 1{,}4982w - 13{,}761\, w^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

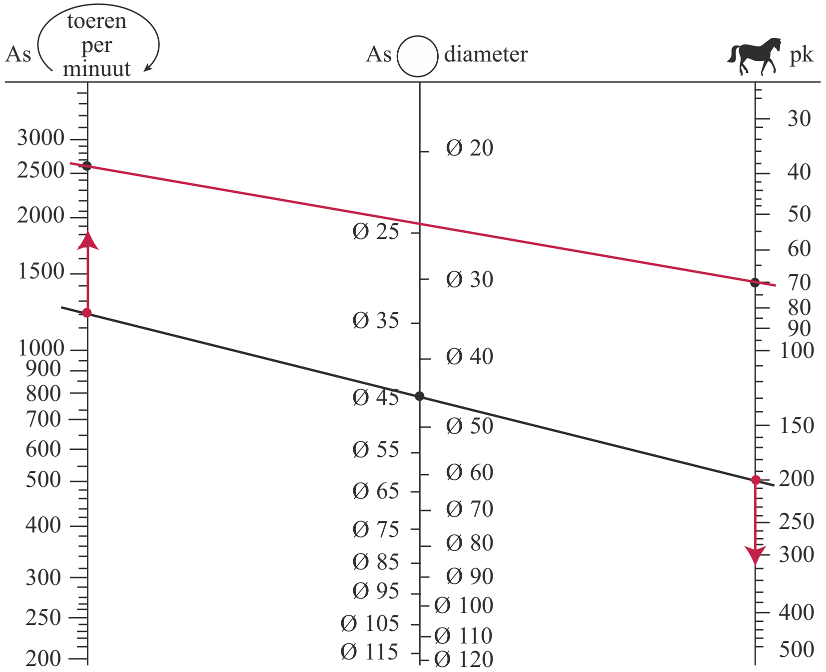
$$G'_C = 1{,}4982 - 13{,}761 \cdot \frac{1}{2} w^{-\frac{1}{2}} = 1{,}4982 - \frac{6{,}8805}{\sqrt{w}}$$

$$G'_C = 0 \Leftrightarrow 1{,}4982 - \frac{6{,}8805}{\sqrt{w}} = 0 \Leftrightarrow 1{,}4982 = \frac{6{,}8805}{\sqrt{w}} \Leftrightarrow \sqrt{w} = \frac{6{,}8805}{1{,}4982} = 4{,}592... \Rightarrow$$

$w = (4{,}592...)^2 = 21{,}091...$
Voor windsnelheden vanaf 21,09 m/s (in twee decimalen nauwkeurig) is de formule van Court niet meer realistisch.

Schroefas

50 De verbindinglijn van 2600 tpm naar 70 pk snijdt de lijn die bij asdiameter hoort bij iets minder dan 25 mm. De asdiameter moet dus minimaal ongeveer 25 mm zijn.



Een asdiameter tussen 30 en 40 mm is voor dit type motor groot genoeg.

51 Als het vermogen groter wordt, daalt het rechter punt in de grafiek. Omdat het snijpunt met de asdiameter bij 45 mm blijft, zal het linkerpunt omhoog gaan en dat betekent dat het toerental hoger wordt (zie de rode pijlen in de grafiek bij de vorige vraag).

52 Voor punt B is het vermogen goed af te lezen: $P = 400$. Verder ligt B op de lijn behorende bij $D = 60$. Invullen in de formule geeft:

$$60 = 79{,}78 \cdot \sqrt[3]{\frac{400}{R}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{400}{R}} = \frac{60}{79{,}78} = 0{,}752... \Leftrightarrow \frac{400}{R} = (0{,}752...)^3 \Leftrightarrow$$

$$R = \frac{400}{(0{,}752...)^3} = 940{,}3... \approx 940 \text{ toeren per minuut.}$$

De vergelijking $60 = 79{,}78 \cdot \sqrt[3]{\frac{400}{x}}$ *mag ook met de rekenmachine (intersect/snijpunt) worden opgelost.*

53 Nu is gegeven dat $D = 30$ dus:

$$30 = 79{,}78 \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{R}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{P}{R}} = \frac{30}{79{,}78} = 0{,}376... \Leftrightarrow \frac{P}{R} = (0{,}376...)^3 \Leftrightarrow$$

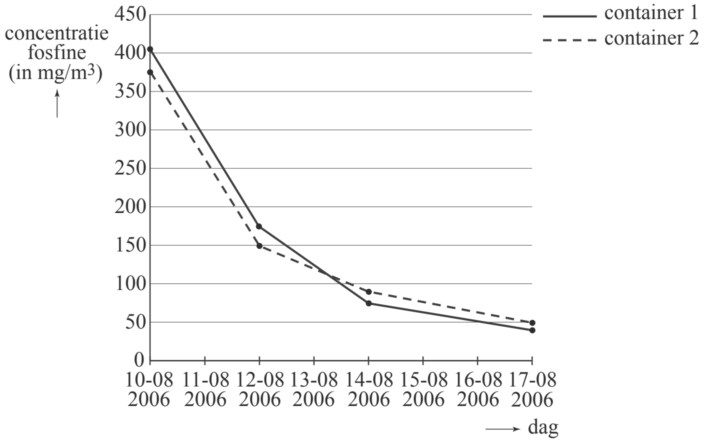
$$P = (0{,}376...)^3 \cdot R \Rightarrow P \approx 0{,}053R$$

4a Exponentiële en logaritmische functies

Containers

In alle havens wordt met containers gewerkt. Voor de verscheping worden de containers **gegast**. De lading en ook de pallets waarop de goederen liggen, kunnen drager zijn van schadelijke parasieten en schimmels en daarom wordt een dodelijk gas in hoge concentratie in de container aangebracht.

Het RIVM[1)] heeft in opdracht van de VROM-Inspectie[2)] in 2006 een onderzoek uitgevoerd naar de concentraties van gassingsmiddelen. In dit onderzoek werden 2 containers gegast met de stof fosfine. Door kleine ventilatieopeningen in de container nam de concentratie fosfine geleidelijk af. In de figuur zie je het verloop van de concentratie fosfine.



De concentratie van het gas fosfine in container 1 is bij benadering te beschrijven met een dalend exponentieel verband.

1 Bereken met behulp van de figuur met hoeveel procent de concentratie fosfine in container 1 per dag afneemt.

In container 2 is ook sprake van exponentiële afname. Het RIVM geeft in zijn rapport de volgende formule hiervoor:

$C = 0{,}75^{t-20{,}6}$

Hierbij is C de concentratie fosfine in mg/m^3 en t de tijd in dagen na 10 augustus 2006.

noot 1 RIVM: Rijksinstituut voor Volksgezondheid en Milieu

noot 2 VROM: Volkshuisvesting, Ruimtelijke Ordening en Milieubeheer

Het RIVM had de formule ook op een andere wijze kunnen geven: bijvoorbeeld in de vorm $C = b \cdot g^t$ met b en g constanten.

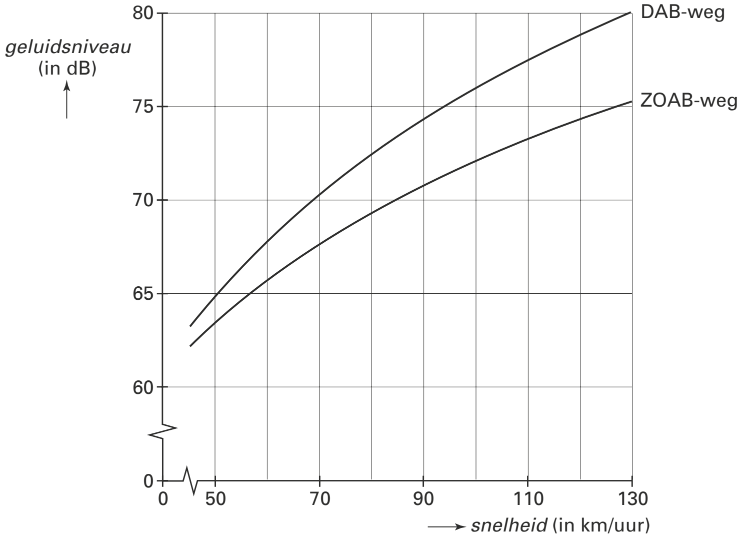
2 Schrijf de formule van het RIVM voor de afname van het gas in container 2 in de vorm $C = b \cdot g^t$.

Fosfine is een gevaarlijke stof. Het RIVM hanteert een **alarmeringsgrenswaarde** van 2 mg/m^3. Dat betekent dat er gevaar is voor mensen en dieren wanneer de concentratie fosfine groter is dan 2 mg/m^3.

3 Bereken met de formule $C = 0{,}75^{t-20{,}6}$ op welke datum de concentratie fosfine in container 2 onder de alarmeringsgrenswaarde zakt.

Asfaltbetonwegen

De snelwegen in Nederland zijn voornamelijk asfaltbetonwegen.
De meest voorkomende zijn de dichte asfaltbetonwegen (DAB-wegen) en de zeer open asfaltbetonwegen (ZOAB-wegen).
In de figuur is voor bovengenoemde soorten wegen het verband weergegeven tussen de snelheid v van het verkeer en het geluidsniveau D van het verkeer.
Hierbij is v in km/uur en D in dB (decibel).



Bij een ZOAB-weg geldt bij benadering de volgende formule

$D = 28 \cdot \log(v) + 16$

Een geluidsniveau van 20 dB of lager kun je niet meer horen. Een geluidswal vermindert het geluidsniveau met ongeveer 43 dB. Aan de ene kant van de geluidswal loopt een ZOAB-weg en aan de andere kant wonen mensen.

4 Bereken bij welke snelheid de bewoners achter de geluidswal iets van het verkeer beginnen te horen. Geef je antwoord in gehele kilometers per uur.

Voor DAB-wegen geldt voor het verband tussen v en D bij benadering de formule

$D = 36 \cdot \log(v) + 4$

5 Bereken bij welke snelheden van het verkeer het geluidsniveau op een ZOAB-weg meer dan 3 dB lager is dan op een DAB-weg.

Een auto wordt op een ZOAB-weg ingehaald door een auto van hetzelfde type, die twee keer zo snel rijdt.

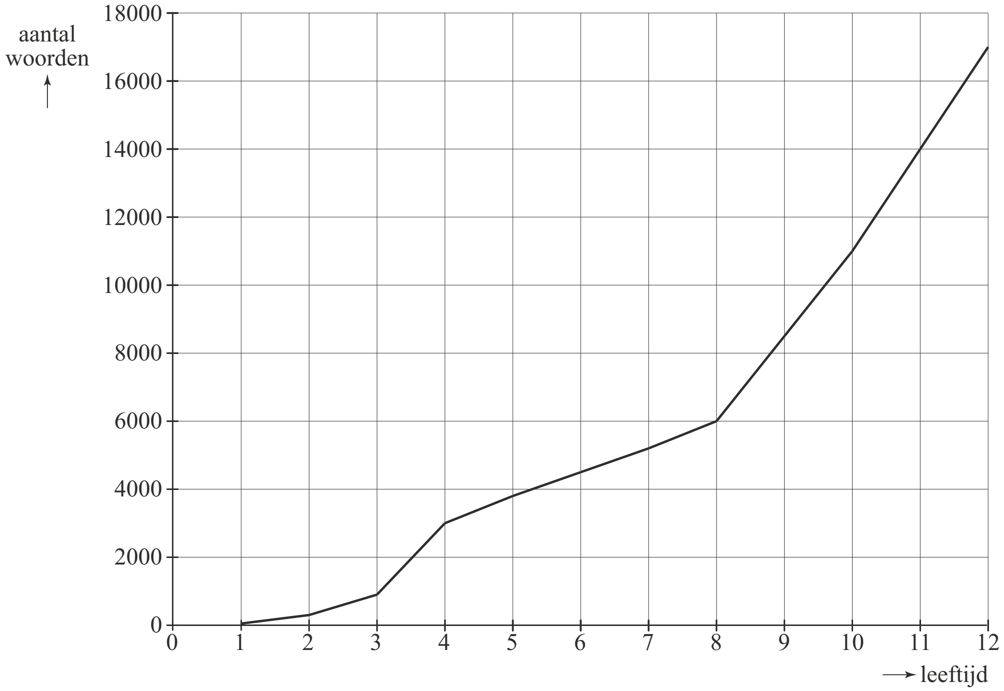
6 Toon algebraïsch aan dat het verschil van de geluidsniveaus van beide auto's constant is, dus niet van de snelheid afhangt.

Woordenschat

De woorden die je begrijpt of kunt gebruiken, vormen samen je woordenschat.
Hoe groter je woordenschat is, des te beter kun je teksten lezen, teksten begrijpen en je mondeling en schriftelijk in een taal uitdrukken.
In deze opgave beperken we ons tot mensen die opgroeien met de Nederlandse taal als moedertaal.

De woordenschat van een kind groeit bijna onmerkbaar door luisteren, spreken en lezen. In Nederland heeft een kind als het de leeftijd van 4 jaar bereikt een woordenschat van gemiddeld 3000 woorden. Tot de 12e verjaardag groeit dit tot gemiddeld 17 000 woorden.
In onderstaande figuur is dit grafisch weergegeven.

gemiddelde woordenschat van Nederlandstalige kinderen in Nederland



Uit de figuur blijkt dat de gemiddelde woordenschat van de 8e tot de 12e verjaardag sneller groeit dan van de 4e tot de 8e verjaardag.

7 Bereken met hoeveel woorden per jaar de gemiddelde woordenschat van een kind meer groeit van de 8e tot de 12e verjaardag dan van de 4e tot de 8e verjaardag.
Je kunt hierbij gebruik maken van de figuur.

We gaan uit van een woordenschat van gemiddeld 17 000 op de 12e verjaardag.
Na de 12e verjaardag gaat de woordenschat onder jongeren behoorlijk variëren:
Bij het bereiken van de leeftijd van 21 jaar varieert deze van 45 000 tot 150 000.

Bij sommige jongeren spreken we van een **hoge** woordenschat. Bij hen groeit de woordenschat exponentieel tot gemiddeld 150 000 wanneer de leeftijd van 21 jaar bereikt wordt. Hiervoor is de volgende formule opgesteld:

$W_h = 17\,000 \cdot 1{,}27^t$

Hierbij is t de tijd in jaren met $t = 0$ op de 12e verjaardag.

In deze formule is de jaarlijkse groeifactor afgerond op twee decimalen.

8 Bereken deze groeifactor in drie decimalen nauwkeurig.

Bij andere jongeren spreken we van een **lage** woordenschat. Bij deze jongeren groeit de woordenschat lineair tot gemiddeld 45 000 op hun 21e verjaardag.
Hiervoor geldt de volgende formule:

$W_l = at + b$

Hierbij is t de tijd in jaren met $t = 0$ op de 12e verjaardag.
Ga ook hierbij uit van een woordenschat van 17 000 op de 12e verjaardag.

Met behulp van de formule $W_l = at + b$ kan de woordenschat die jongeren met een lage woordenschat op hun 18e verjaardag hebben, berekend worden.
Vervolgens kan met behulp van de formule $W_h = 17\,000 \cdot 1{,}27^t$ worden berekend hoeveel maanden **eerder** jongeren met een hoge woordenschat deze zelfde woordenschat zullen hebben.

9 Bereken dit aantal maanden.

In de praktijk gebruikt men graag formules waar de werkelijke leeftijd in voorkomt.
Voor jongeren met een hoge woordenschat geldt de formule
$W_h = 17\,000 \cdot 1{,}27^t$ (met $t = 0$ op de 12e verjaardag).

10 Schrijf deze in de vorm $W_h = b \cdot g^L$, waarbij L de werkelijke leeftijd is. Rond b af op tientallen.

Doelpunten

Aan het wereldkampioenschap voetbal 2010 in Zuid-Afrika deden 32 landen mee.

Engelse sportstatistici hebben zich voor het toernooi van 2010 aan voorspellingen gewaagd. Zij keken voor de deelnemende landen naar het bruto binnenlands product per hoofd van de bevolking (*bbp*), de bevolkingsomvang (*pop*) en de wedstrijdervaring (*erv*). Dat leverde de volgende formule op:

$$GD(A,B) = 0{,}316 \cdot \log\left(\frac{pop(A)}{pop(B)}\right) + 0{,}334 \cdot \log\left(\frac{bbp(A)}{bbp(B)}\right) + 1{,}702 \cdot \log\left(\frac{erv(A)}{erv(B)}\right)$$

Hierbij is GD(A,B) het aantal doelpunten dat land A naar verwachting meer zal scoren dan land B als zij tegen elkaar spelen. Dat aantal hoeft geen geheel getal te zijn en kan ook negatief zijn. Voor wedstrijdervaring koos men het aantal deelnames aan wereldkampioenschappen vóór dat van 2010.

Voor Italië en Engeland zijn *bbp* en *pop* nagenoeg even groot, zodat alleen de wedstrijdervaring het verschil bepaalt. Vóór 2010 deed Italië 16 keer mee aan een wereldkampioenschap, Engeland 12 keer.

11 Bereken met behulp van de formule het voorspelde aantal doelpunten dat Italië méér maakt als het tegen Engeland zou spelen. Rond het antwoord af op twee decimalen.

Logischerwijs moet de uitkomst van de formule tegengesteld worden als je de landen verwisselt. Er zou dus voor elk tweetal landen A en B moeten gelden:
GD(A,B) = –GD(B,A).

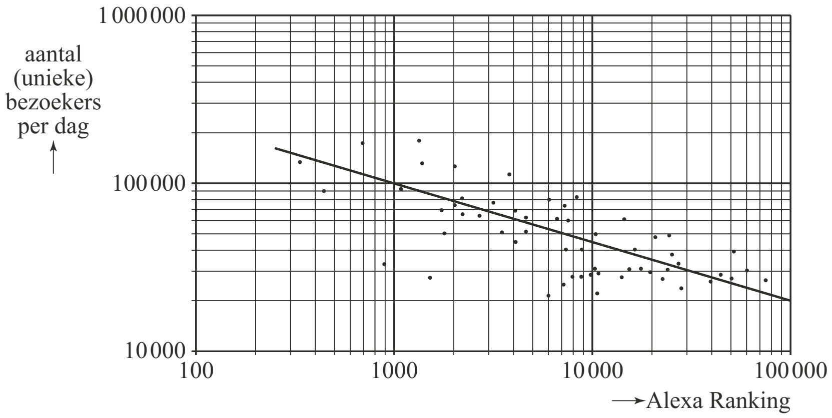
12 Toon de juistheid hiervan aan met behulp van de rekenregels voor logaritmen.

Volgens de formule wint Nederland niet van Brazilië omdat GD(*Ned,Bra*) = –0,67 .
De waarde –0,67 valt eigenlijk nog wel mee. Brazilië heeft veel meer inwoners dan Nederland: 185,7 miljoen tegenover 16,6 miljoen. Ook nam Brazilië vóór 2010 vaker deel: 18 keer en Nederland maar 8 keer.
Blijkbaar is het *bbp* van Nederland veel groter dan dat van Brazilië.

13 Bereken hoeveel keer zo groot het *bbp* van Nederland is als het *bbp* van Brazilië.

Websites

Een manier om de populariteit van websites te meten, is door naar de zogenoemde *Alexa Ranking* te kijken. Het internetbedrijf Alexa houdt bij hoe vaak websites bezocht worden, en stelt daarvan een ranglijst op. Zo heeft de website google.com wereldwijd ranking 1 met 1,2 miljard unieke bezoekers per dag (begin 2011).
Voor een aantal Nederlandse websites is het verband tussen de Alexa Ranking en het aantal unieke bezoekers per dag weergegeven in onderstaande figuur.
In de figuur is op beide assen gebruik gemaakt van een logaritmische schaalverdeling.



In de figuur is te zien dat er verschillende websites zijn met een Alexa Ranking tussen de 1000 en de 2000. Het verschil tussen de bijbehorende aantallen unieke bezoekers per dag van deze websites is vrij groot.

14 Bereken dit maximale verschil met behulp van de figuur.

De punten in de figuur liggen globaal op een rechte lijn. Deze lijn is in de figuur getekend. Bij deze lijn hoort de formule $B = 1118\,000 \cdot r^{-0{,}35}$.
Hierin is B het aantal unieke bezoekers per dag en r de Alexa Ranking van de website.

Lang niet bij alle aantallen unieke bezoekers per dag is in de figuur precies af te lezen welke Alexa Ranking de betreffende website heeft. Met de hierboven vermelde formule is deze ranking wel te berekenen.

15 Bereken met behulp van de formule de Alexa Ranking van een website met 25 000 unieke bezoekers per dag.

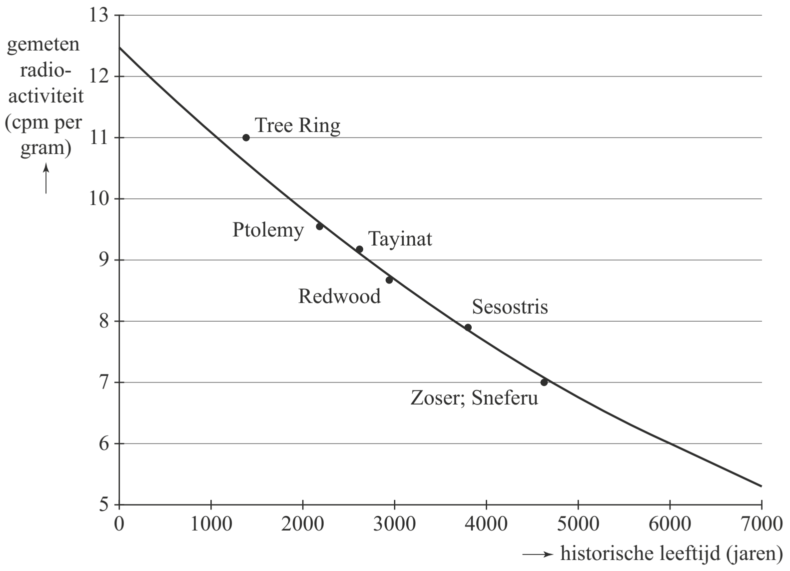
16 Beredeneer aan de hand van de formule dat de grafiek van B daalt.

De formule $B = 1118\,000 \cdot r^{-0{,}35}$ kan herschreven worden in de vorm $\log(B) = a + b \cdot \log(r)$.

17 Bereken de waarden van a en b.

Archeologie

In de archeologie gebruikt men de C14-methode bij het vaststellen van de historische leeftijd (ouderdom) van bepaalde vondsten. Deze methode werd in 1949 ontwikkeld door de Amerikaanse scheikundige Libby, die hiervoor de Nobelprijs gekregen heeft. Volgens de theorie neemt de radioactiviteit van dood organisch materiaal exponentieel af en daarom kun je door radioactiviteit te meten bepalen hoe oud een voorwerp is.
De figuur hieronder komt uit een artikel van Libby uit 1949. Libby testte de C14-methode door deze te gebruiken op zes verschillende voorwerpen waarvan de historische leeftijd op een andere manier bekend was.



Langs de verticale as staat de gemeten radioactiviteit in cpm (counts per minute) per gram materiaal. Dit is een maat voor de hoeveelheid C14.
Langs de horizontale as staat de historische leeftijd van het voorwerp in jaren.
Volgens de theorie neemt de gemeten radioactiviteit exponentieel af.
De grafiek gaat door de punten (0; 12,5) en (6000; 6). Hiermee kan men de groeifactor berekenen.

18 Bereken met deze punten de groeifactor per jaar in 7 decimalen nauwkeurig.

Voor het vervolg van de opgave gaan we uit van de formule:

$N = 12{,}5 \cdot 0{,}999878^t$

Hierin is N de gemeten radioactiviteit van het voorwerp in cpm per gram en t is de historische leeftijd volgens de C14-methode van het voorwerp in jaren.

De punten in de figuur stellen de metingen aan de voorwerpen voor. Het punt ‘Ptolemy’ hoort bij een stuk hout van een doodskist van een Egyptische mummie. Deskundigen schatten dat deze doodskist uit ongeveer 200 voor Chr. dateert. Voor dit hout werd in 1949 een radioactiviteit van 9,5 cpm per gram gemeten.

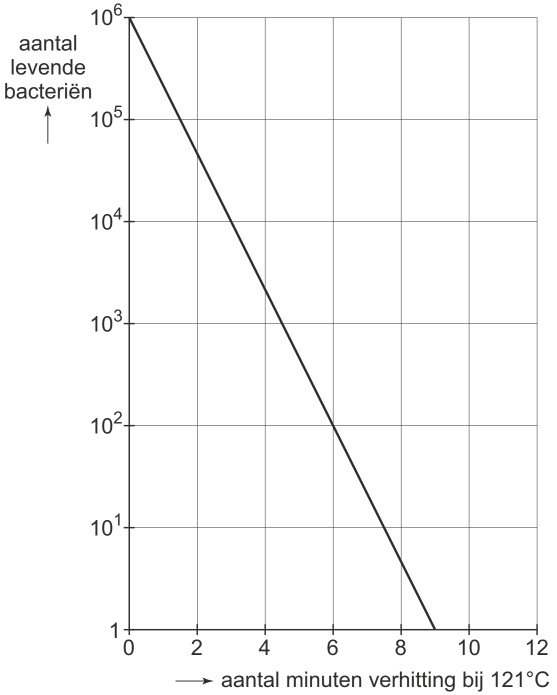
19 Bereken het verschil tussen de historische leeftijd volgens de C14-methode en de schatting van de deskundigen.

De formule $N = 12{,}5 \cdot 0{,}999878^t$ kan herschreven worden tot de formule $N = 12{,}5 \cdot e^{at}$.

20 Bereken a in 6 decimalen nauwkeurig.

Sterilisatie

Om voedingswaren tegen bederf te beschermen, worden ze tijdelijk verhit. Men noemt dit steriliseren. Er zijn verschillende sterilisatiemethoden.
In deze opgave kijken we naar het sterilisatieproces bij twee soorten bacteriën.
De temperatuur bij dat proces is 121 °C. Naarmate de bacteriën korter aan deze temperatuur zijn blootgesteld, zullen er meer bacteriën overleven. In de figuur zie je een overlevingsgrafiek van de Bacillus stearothermophilus.



Bij een overlevingsgrafiek heeft de verticale as altijd een logaritmische schaalverdeling.
Het aantal bacteriën bij aanvang van het sterilisatieproces stelt men altijd op 1 miljoen.
We gaan er steeds vanuit dat voor verschillende soorten bacteriën de overlevings-grafieken rechte lijnen zijn indien de verticale as een logaritmische schaalverdeling heeft. Bij de grafiek in de figuur hoort een formule van de vorm:

$N(t) = 10^6 \cdot 2^{-r \cdot t}$

Hierin is $N(t)$ het aantal bacteriën na t minuten en is r de sterftefactor. De sterftefactor is afhankelijk van het type bacteriën.

Met behulp van de figuur kun je berekenen dat de sterftefactor r van de Bacillus stearothermophilus ongeveer gelijk is aan 2,2.

21 Toon dat met een berekening aan.

De D-waarde is de tijd in minuten die nodig is om het aantal bacteriën te reduceren tot 10% van het oorspronkelijke aantal. Net als de sterftefactor is de D-waarde afhankelijk van de soort bacteriën.

22 Bereken voor de Bacillus stearothermophilus de D-waarde met behulp van bovenstaande formule en leg uit hoe je deze D-waarde kunt controleren met behulp van de figuur.

Men heeft ook van andere bacteriën de D-waarde bepaald. Voor de Clostridium botulinum is deze D-waarde gelijk aan 2,55 minuten.
Met dit gegeven kunnen we de overlevingsgrafiek van de Clostridium botulinum tekenen. Ook voor deze overlevingsgrafiek beginnen we weer met 1 miljoen bacteriën.

23 Teken deze overlevingsgrafiek in de figuur. Licht je werkwijze toe.

Zoals hierboven al beschreven, geldt voor Bacillus stearothermophilus de formule

$N(t) = 10^6 \cdot 2^{-2{,}2 \cdot t}$

Met behulp van deze formule kun je voor elk tijdstip t berekenen hoe groot het aantal bacteriën op dat tijdstip is.
Je kunt aan deze formule (en ook aan de grafiek, zie de figuur) zien dat er steeds minder bacteriën zijn naarmate de tijd toeneemt. Het aantal bacteriën neemt echter niet met een vast aantal per minuut af.

24 Bereken, gebruik makend van de afgeleide van $N(t)$, op welk tijdstip dat aantal bacteriën afneemt met 10 000 bacteriën per minuut.

Voor elk type bacteriën kunnen we de D-waarde berekenen wanneer we de sterftefactor r kennen. Daarvan heb je in vraag 22 een voorbeeld gezien. Wanneer we dat voor een aantal typen bacteriën doen, blijkt dat D en r omgekeerd evenredig zijn.

25 Toon aan, door gebruik te maken van de formule $N(t) = 10^6 \cdot 2^{-2{,}2 \cdot t}$, dat tussen D en r een omgekeerd evenredig verband bestaat.

Wereldbevolking

De wereldbevolking neemt steeds sneller toe. In tabel 1 zijn schattingen van de Verenigde Naties en andere instanties gecombineerd.

tabel 1

jaar	N (in miljoenen)
1650	500
1750	795
1850	1265
1900	1656
1950	2516
2000	6000

Wetenschappers proberen formules op te stellen die N uitdrukken als functie van de tijd t.

Een voor de hand liggend idee is om een exponentiële formule te gebruiken.
Een exponentiële formule die redelijk past bij de gegevens in tabel 1 is:

$N = 0{,}0101 \cdot 1{,}0065^t$ met t het jaartal

Voor de periode 1650-2000 geeft deze formule inderdaad aantallen die redelijk passen bij tabel 1, maar vanzelfsprekend zijn ze niet precies kloppend. Zo geeft de formule voor de jaren 1850 en 1950 aantallen die meer dan 20% boven de werkelijke aantallen liggen.

26 Onderzoek voor welk van deze twee jaren de procentuele afwijking het grootst is.

Volgens sommige schattingen biedt de aarde ruimte en voedsel aan ten hoogste 20 miljard mensen.

27 Onderzoek vanaf welk jaar de aarde volgens de formule te "klein" zal zijn.

Schoksgewijs exponentieel
Sommige wetenschappers vragen zich af hoeveel mensen er ooit op aarde geleefd hebben.
De Amerikaan Carl Haub schatte in 2002 dat er tot en met dat jaar ruim 100 miljard mensen op aarde geleefd hadden (of nog leefden). Hij ging daarbij uit van een rekenmodel met "schoksgewijs exponentiële toename" van de wereldbevolking.
In tabel 2 zie je een gedeeltelijk overzicht van dit rekenmodel.

tabel 2

periode	groei wereldbevolking in miljoenen	groeipercentage per jaar
8000 voor Chr. tot 1 na Chr.	5-300	0,5119
1-1200	300-450	0,3379
1200-1650	450-500	0,2342
1650-1750	500-795	0,4648
1750-1850	795-1265	0,4656
1850-1900	1265-1656	0,5401
1900-1950	1656-2516	
1950-1995	2516-5760	1,8576
1995-2002	5760-6215	1,0920

In tabel 2 kun je onder andere aflezen dat volgens het model van Haub de wereldbevolking in de periode 1850-1900 jaarlijks toenam met 0,5401%, van 1265 miljoen tot 1656 miljoen. Hierbij wordt er dus van uit gegaan dat er binnen elke periode van de tabel een exponentiële groei plaatsvindt en de groeifactoren per periode kunnen verschillen.

28 Bereken het ontbrekende groeipercentage in vier decimalen nauwkeurig.

Volgens het model van Haub werd de grens van 1 miljard mensen bereikt in de periode 1750-1850.

29 Bereken in welk jaar dit volgens het model van Haub gebeurde.

Om een schatting te krijgen van het aantal mensen dat ooit op aarde geleefd heeft, gebruikte Haub voor elke periode in tabel 2 schattingen van de aantallen geboortes. We bekijken de aanpak van Haub voor de periode van 1995 tot en met 2002.
Voor die periode 1995-2002 kan de wereldbevolking bij benadering beschreven worden met de formule

$N = 5760 \cdot 1{,}01092^t$

Hierbij is t de tijd in jaren, waarbij $t = 0$ overeenkomt met het jaar 1995, en is N de wereldbevolking in miljoenen.

Volgens redelijke schattingen werden er in deze periode jaarlijks per 1000 mensen 23 baby's geboren. Dat betekent dat er in deze periode in totaal bijna 1 miljard baby's geboren werden.

30 Bereken het totale aantal geboortes in deze periode in miljoenen nauwkeurig.

Koolstofdatering

Koolstofdatering is een manier om de ouderdom van organisch materiaal te bepalen, bijvoorbeeld van hout, plantenresten of botten. In levende organismen komt naast de gewone, niet-radioactieve vorm van koolstof C-12 ook het radioactieve C-14 voor en wel in een bepaalde verhouding tot C-12. Na de dood van het organisme zal de hoeveelheid C-14 door radioactief verval exponentieel afnemen. Door te meten hoeveel C-14 er nog over is, kan men de ouderdom van het organische materiaal bepalen.

Voor de afname van de hoeveelheid C-14 geldt de volgende formule:

$Q = 100 \cdot g^t$

Hierin is Q de relatieve huidige hoeveelheid C-14 (als percentage van de oorspronkelijke hoeveelheid C-14), g de jaarlijkse groeifactor en t de ouderdom van het organische materiaal in jaren.

De halfwaardetijd, ook wel halveringstijd genoemd, van C-14 is 5730 jaar. Hiermee kunnen we berekenen dat $g \approx 0,99988$.

31 Bereken de waarde van g in zes decimalen nauwkeurig.

De methode van koolstofdatering is niet bruikbaar voor materiaal ouder dan 60 000 jaar, omdat de hoeveelheid C-14 dan te klein is om te meten.

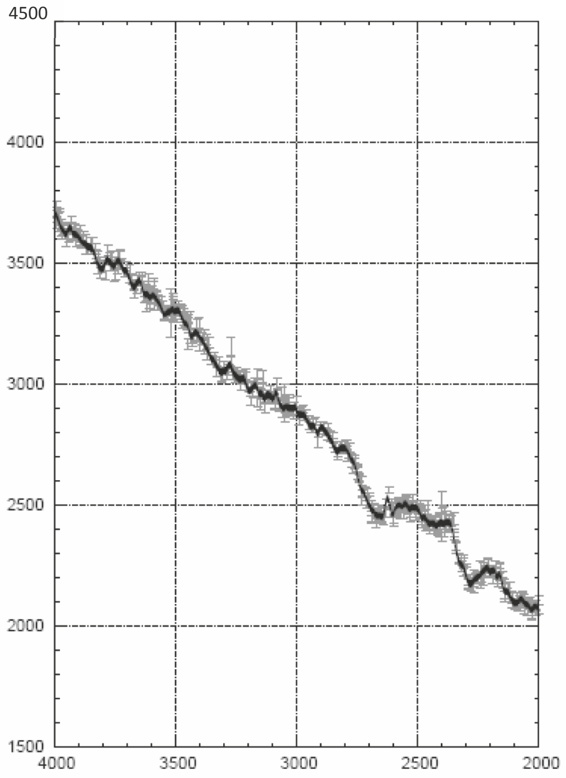
32 Bereken hoeveel procent van de oorspronkelijke hoeveelheid C-14 nog over is na 60 000 jaar. Rond je antwoord af op honderdsten van procenten.

De formule $Q = 100 \cdot 0{,}99988^t$ kan, bij benadering, herschreven worden tot de volgende formule:

$$t = \frac{\ln(Q) - 4{,}6052}{-0{,}00012}$$

33 Laat dit zien.

De ouderdom die men met de formule $t = \frac{\ln(Q) - 4{,}6052}{-0{,}00012}$ berekent, is niet de werkelijke ouderdom. In de volgende figuur zie je een gedeelte van de zogenoemde **calibratie-curve**, dat is een grafiek waarmee men de berekende ouderdom om kan zetten in de werkelijke ouderdom. Deze calibratiecurve is gemaakt door de hoeveelheid C-14 te bepalen in materiaal waarvan de ouderdom ook op een andere manier bekend was.



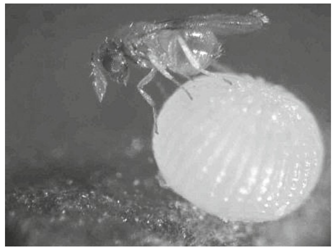
Langs de verticale as is de berekende ouderdom uitgezet. Deze wordt uitgedrukt in jaren BP, “Before Present” (vóór heden). Hiermee wordt in dit verband altijd bedoeld: het aantal jaren vóór 1950, zodat het niet nodig is te weten in welk jaar het onderzoek is gedaan. Langs de horizontale as staat de werkelijke ouderdom, ook in jaren BP, dus in jaren vóór 1950.
Bij Vlaardingen is een kano gevonden, gemaakt van een uitgeholde boomstam.
Om de ouderdom van deze kano te bepalen wordt de hoeveelheid C-14 gemeten.
Het blijkt dat er nog 73,19% over is van de oorspronkelijke hoeveelheid C-14.

34 Bereken in welk jaar deze kano gemaakt is.

De curve van de figuur verloopt vooral rechtsonder grillig, doordat er voor deze periode veel materiaal beschikbaar was om de curve te maken. Voor het oudste deel van de calibratiecurve is niet zoveel materiaal beschikbaar. Voor een bepaald gedeelte heeft men alleen de volgende gegevens: bij een berekende ouderdom van 20 550 BP hoort een werkelijke ouderdom van 22 650 voor Chr. en bij een berekende ouderdom van 19 925 BP hoort een werkelijke ouderdom van 21 925 voor Chr.
Men neemt aan dat de calibratiecurve tussen deze twee punten volgens een rechte lijn verloopt.

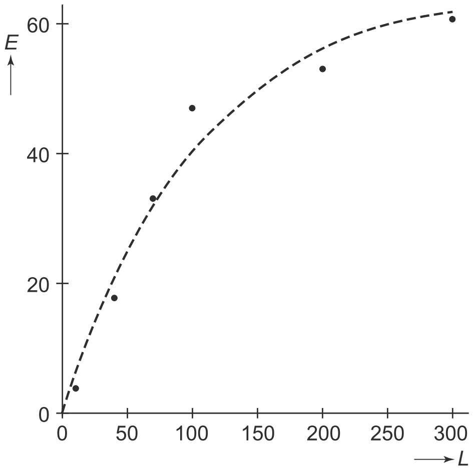
35 Bereken, uitgaande van die rechte lijn, de werkelijke ouderdom van een stuk hout waarvan de berekende ouderdom 20 100 BP is. Rond je antwoord af op tientallen jaren.

Sluipwespen



Larven kunnen grote schade toebrengen aan gewassen. Larven kunnen milieuvriendelijk bestreden worden met sluipwespen. Een sluipwesp legt een eitje in de larve waardoor de larve uiteindelijk dood gaat. Een onderzoeker wilde weten hoeveel larven één sluipwesp maximaal per dag kan bestrijden.

Om dit te onderzoeken werd één sluipwesp in een grote afgesloten ruimte met larven gezet.
Na één dag werd geteld hoeveel larven er in totaal in de ruimte waren.
Dit aantal noemen we *L*. Ook werd geteld hoeveel larven er een eitje bevatten.
Dit aantal wordt *E* genoemd. Het experiment werd zes maal uitgevoerd. De resultaten zijn als stippen te zien in de figuur.



Het verband tussen *E* en *L* kan redelijk worden benaderd door de formule

$E = 64 \cdot (1 - e^{-0{,}01L})$

In de figuur zie je ook de grafiek die bij deze formule hoort. Uit de figuur valt af te lezen dat bij $L = 100$ het aantal larven met eitjes volgens de formule nogal afwijkt van het gemeten aantal larven met eitjes.

36 Bereken met behulp van de formule bij $L = 100$ het verschil tussen het aantal larven met eitjes volgens de formule, afgerond op een geheel aantal larven, en het gemeten aantal larven met eitjes.

In de figuur is te zien dat het aantal larven met eitjes *E* steeds minder snel toeneemt als het totale aantal larven *L* toeneemt. Dit is ook in te zien met behulp van de afgeleide van *E* .

37 Bepaal de afgeleide van *E* en toon daarmee aan dat het aantal larven met eitjes volgens de formule steeds minder snel toeneemt bij toenemend aantal larven.

De formule is een hulpmiddel om te schatten hoeveel larven maximaal per dag door één sluipwesp kunnen worden bestreden. Volgens de formule kan het aantal larven met eitjes *E* niet boven een bepaalde grenswaarde uitkomen.

38 Geef deze grenswaarde. Licht je antwoord toe.

Dialecten vergelijken

Taalkundigen doen veel onderzoek naar de dialecten in Nederland en Vlaanderen. Onderzoeker M. Spruit onderzocht in 2008 in hoeverre dialecten op elkaar lijken.
De mate waarin twee dialecten verschillen, wilde hij uitdrukken in een getal.
Daarom vergeleek hij steeds twee dialecten op een aantal kenmerken en telde hij vervolgens de verschillen. Elk verschil tussen deze twee dialecten leverde een punt op. Het totale aantal punten is de **Hammingafstand** tussen deze twee dialecten.
Bijvoorbeeld: in Lunteren kan men zeggen: 'Jan herinnert **zich** dat verhaal wel', maar ook: 'Jan herinnert **z'n eigen** dat verhaal wel'. In Veldhoven zegt men altijd: 'Jan herinnert **zich** dat verhaal wel'. In geen van beide dialecten gebruikt men hier '**hem**' of '**zichzelf**' of '**hemzelf**', iets dat in andere dialecten wel voorkomt.

Het vergelijken van deze vijf kenmerken levert dus in totaal 1 punt op voor de Hammingafstand. Dat is in tabel 1 weergegeven.

tabel 1

	Lunteren	Veldhoven	punten (voor Hammingafstand)
zich	+	+	0
hem	–	–	0
z'n eigen	+	–	1
zichzelf	–	–	0
hemzelf	–	–	0

Stel men vergelijkt dialect X met het dialect van Lunteren. En stel dat vergelijken van de vijf kenmerken uit tabel 1 in totaal 3 punten oplevert voor de Hammingafstand.
In dialect X wordt ook 'zich' gebruikt.

39 Schrijf alle mogelijkheden voor deze vijf kenmerken voor dialect X op.
Gebruik hiervoor de tabel op de volgende pagina.

 ©ThiemeMeulenhoff
©ThiemeMeulenhoff

	Lunteren	Dialect X			
zich	+				
hem	–				
z'n eigen	+				
zichzelf	–				
hemzelf	–				

De onderzoeker vergeleek niet vijf, maar 507 kenmerken. Het resultaat is een tabel waarin per tweetal dialecten de Hammingafstand te zien is. In tabel 2 zie je hier een gedeelte van.
Het getal 66 in deze tabel voor het tweetal Lunteren-Bellingwolde (of Bellingwolde-Lunteren) betekent dat bij deze twee dialecten 66 van de 507 kenmerken verschillen: de Hammingafstand is 66.

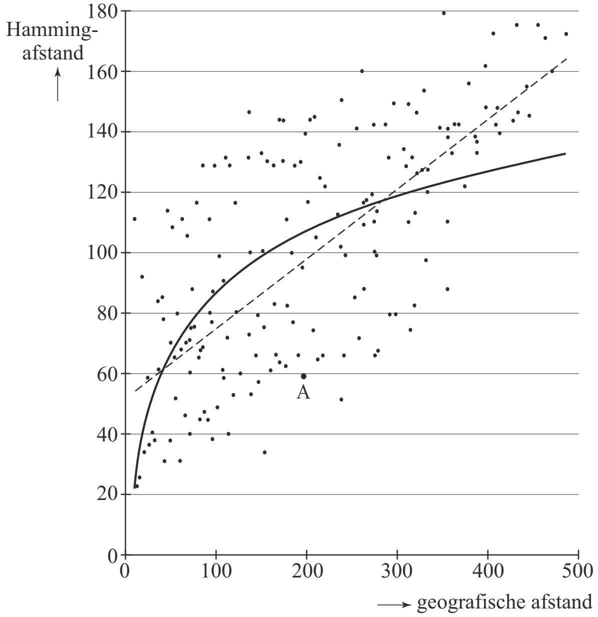
tabel 2

Dialect	Lunteren	Bellingwolde	Hollum	Doel	Sint-Truiden	Veldhoven
Lunteren	–	66	52	122	77	47
Bellingwolde	66	–	56	134	81	51
Hollum	52	56	–	116	63	59
Doel	122	134	116	–	115	111
Sint-Truiden	77	81	63	115	–	72
Veldhoven	47	51	59	111	72	–

In tabel 2 heeft de onderzoeker dus 15 Hammingafstanden berekend.
In totaal stonden er echter geen 6 dialecten, maar 267 dialecten in de tabel.
Bij elk tweetal heeft de onderzoeker de Hammingafstand berekend.
40 Bereken hoeveel Hammingafstanden de onderzoeker in totaal heeft berekend.

De onderzoeker zocht naar een verband tussen de geografische afstand en de Hammingafstand van dialecten. In het kaartje in de figuur zie je een aantal dialecten met stippen aangegeven. In het assenstelsel is voor elk tweetal dialecten de Hammingafstand (in punten) uitgezet tegen de geografische afstand (in km).
In het assenstelsel kun je zien dat bij punt A de afstand tussen twee plaatsen gelijk is aan 200 km en de Hammingafstand ongeveer gelijk is aan 58.

De onderzoeker heeft op twee manieren geprobeerd het verband tussen de geografische afstand en de Hammingafstand met een wiskundig verband te benaderen. Beide manieren, een lineair verband en een logaritmisch verband, zijn weergegeven in het assenstelsel.



De onderzoeker heeft in het assenstelsel dus ook een grafiek voor een logaritmisch verband getekend. De formule voor dit logaritmische verband is:

$H = -45{,}88 + 28{,}85 \cdot \ln(x)$

Hierin is H de Hammingafstand en x de geografische afstand in km.

Op de getekende rechte lijn liggen de punten (10, 55) en (400, 145).
41 Stel met behulp van deze twee punten een formule op voor het lineaire verband in het assenstelsel en bereken met behulp van de formules bij welke geografische afstanden de Hammingafstanden volgens het lineaire en het logaritmische verband gelijk zijn. Rond je antwoord af op gehele kilometers.

De grafiek van het logaritmische verband in het assenstelsel gaat bijvoorbeeld door de punten (50, 67), (100, 87), (200, 107) en (400, 127).
Hieraan kun je zien dat volgens het logaritmisch verband bij een verdubbeling van de geografische afstand de Hammingafstand steeds met 20 toeneemt. Met behulp van de formule $H = -45{,}88 + 28{,}85 \cdot \ln(x)$ kun je aantonen dat dit altijd zo is.
42 Toon met behulp van de rekenregels van de logaritmen aan dat $-45{,}88 + 28{,}85 \cdot \ln(2x)$ ongeveer gelijk is aan $-45{,}88 + 28{,}85 \cdot \ln(x) + 20$.

Morfine

In het ziekenhuis krijgen patiënten vaak een pijnstiller toegediend. Als pijnstiller gebruikt men meestal een oplossing van morfine en een oplosmiddel zoals gedestilleerd water.
De concentratie van morfine in opgeloste vorm geeft men aan met een percentage. Zo bedoelt men met **morfine-2%** dat er in elke 100 milliliter van de oplossing 2 gram (2000 milligram) morfine aanwezig is.

In de praktijk beschikt men in een ziekenhuis vaak over kant-en-klare oplossingen, die verdund worden met het oplosmiddel om een oplossing met een lagere concentratie te verkrijgen.

Veronderstel dat men beschikt over morfine-3% en men wil daarmee morfine-1% maken.

43 Bereken hoeveel milliliter oplosmiddel er per 100 milliliter morfine-3% moet worden toegevoegd.

Morfine kan ook in combinatie met een andere pijnstiller, bupivacaïne, gebruikt worden. Een mogelijke situatie is de volgende:
– Neem 2 ampullen van elk 10 milliliter met een oplossing van bupivacaïne-0,5%.
– Neem 3 ampullen van elk 10 milliliter met een morfine-oplossing.
– Meng de inhoud van deze vijf ampullen.
– Dien van deze oplossing 3,5 milliliter per uur toe.

44 Bereken hoeveel milligram bupivacaïne de patiënt per uur krijgt.

Een andere manier om morfine toe te dienen is door middel van injecties.
De hoeveelheid morfine in het lichaam neemt na de injectie exponentieel af.
De injectie wordt na 6 uren herhaald, want na die tijd is de hoeveelheid morfine in het lichaam te gering om nog werkzaam te zijn.
De halfwaardetijd van morfine is ongeveer 2,5 uur. Dat betekent dat na 2,5 uur de hoeveelheid morfine in het lichaam is gehalveerd.

Uit deze gegevens volgt dat 6 uur na de injectie de hoeveelheid morfine in het lichaam 19% is van de oorspronkelijke hoeveelheid vlak na de injectie.

45 Toon dit met een berekening aan.

Waardepunten

De verpakkingen van Douwe Egberts koffie zijn voorzien van (waarde)punten die je kunt sparen. Met deze punten kun je bepaalde producten kopen. Als je niet voldoende waardepunten hebt gespaard voor een product, dan kun je een bedrag bijbetalen en zo het product toch aanschaffen.

Marjolein heeft 3600 punten gespaard. Ze wil haar theeservies uitbreiden en kan kiezen uit:

Theeglas	700 punten
Theelepeltje	450 punten
Theekop en schotel	600 punten

Ze wil al haar punten uitgeven en niets bijbetalen. Het blijkt dat er dan 4 verschillende combinaties mogelijk zijn.

46 Welke verschillende combinaties van artikelen kan Marjolein met precies 3600 punten aanschaffen? Licht je antwoord toe.

Op de website van Douwe Egberts (DE) stond tot 2009 het volgende:
– per artikel zijn je eerste 100 punten € 1,50 waard; je moet dan wel betalen met minimaal 100 punten;
– daarna zijn per artikel iedere 100 punten € 0,50 waard;
– betalen met iedere combinatie van punten en geld mag altijd.

Voorbeeld
Kop en schotel van hiernaast kosten samen € 5,-.
Je kunt deze kop en schotel dan kopen voor € 5,- of gratis meenemen voor 800 punten. Ook kun je 400 punten inleveren en nog € 2,- bijbetalen.

Bij DE kost een gebaksbordje € 9,30 en een taartplateau € 46,50.
Marieke wil graag 6 gebaksbordjes en een taartplateau kopen. Ze heeft 12 000 waardepunten en wil zo min mogelijk euro's bijbetalen.

47 Bereken hoeveel euro's Marieke moet bijbetalen.

Er zijn ook andere spaarsystemen te bedenken, bijvoorbeeld een systeem waarbij klanten die veel punten sparen daarvoor iets meer beloond worden. Zo bedenkt Alwin, een wiskunde A-leerling uit 6V, een ander systeem. Zie de tabel.

aantal punten	100	1100	2100	3100	5100	7100	9100
waarde in euro's	1,50	2,14	3,06	4,37	8,90	18,15	37,01

Je kunt in de tabel zien dat er geen lineair verband is tussen het aantal punten en de waarde in euro's.

In het systeem van Alwin is er sprake van een (bij benadering) exponentieel verband.

48 Laat voor alle waarden in de tabel zien dat er inderdaad (bij benadering) sprake is van een exponentieel verband en bereken de groeifactor per 1000 punten in drie decimalen nauwkeurig.

Onregelmatige werkwoorden

Veel werkwoorden die vroeger in het Nederlands onregelmatig waren, zijn in de loop der tijd regelmatig geworden. Een voorbeeld hiervan is het werkwoord ‘wassen’: vroeger was de verleden tijd hiervan: ‘wies’, nu zegt men: ‘waste’.
Ook in het Engels doet dit verschijnsel zich voor. De Amerikaanse onderzoekers Lieberman en Michel hebben in 2007 met behulp van oude teksten de veranderingen bij 177 Engelse werkwoorden onderzocht. Ze merkten hierbij het volgende op: als onregelmatige werkwoorden vaker gebruikt worden, duurt het langer voordat ze regelmatig worden.

De onderzoekers hebben de 177 onderzochte werkwoorden ingedeeld in zes klassen, gerangschikt naar het gebruik ervan. In klasse 1 zitten de twee meest gebruikte werkwoorden, *to be* en *to have*, in klasse 6 de minst gebruikte.
In het Oudengels (rond 800 na Chr.) waren alle 177 werkwoorden onregelmatig, in het Middelengels (rond 1200 na Chr.) waren er nog 145 onregelmatig en in het hedendaagse Engels (rond 2000 na Chr.) nog 98.
Er zijn dus 79 werkwoorden regelmatig geworden.
Het aantal werkwoorden dat regelmatig is geworden, verschilt per klasse: de twee onregelmatige werkwoorden van klasse 1 zijn nog steeds onregelmatig, die van klasse 6 zijn bijna allemaal regelmatig geworden.

De onderzoekers gingen uit van exponentiële afname van het aantal onregelmatige werkwoorden in de loop van de tijd. Omdat de afnamesnelheid per klasse verschilt, heeft elke klasse een andere groeifactor. Voor elke klasse kan de halveringstijd berekend worden: na deze tijd is volgens het model in deze klasse nog de helft van de onregelmatige werkwoorden over; de andere helft is regelmatig geworden.

In klasse 5 is het aantal onregelmatige werkwoorden afgenomen van 50 naar 14 in 1200 jaar tijd.

49 Bereken met behulp van deze gegevens de halveringstijd voor klasse 5. Rond je antwoord af op honderden jaren.

Elke klasse heeft een bepaalde **gebruiksfrequentie**. Dit is een maat voor hoe vaak de werkwoorden in deze klasse gebruikt worden. Klasse 2 heeft bijvoorbeeld een gebruiksfrequentie van 10^{-2} ofwel 0,01: dat betekent dat ongeveer 1 op de 100 gebruikte werkwoorden een werkwoord uit deze klasse is.
In onderstaande tabel zie je voor enkele klassen de gebruiksfrequentie en de halveringstijd.

klasse	gebruiksfrequentie F	halveringstijd T (jaren)
3	$1,6 \cdot 10^{-3}$	5400
4	$2,2 \cdot 10^{-4}$	2000

Volgens de onderzoekers geldt voor de halveringstijd de volgende formule:

$$T = c \cdot \sqrt{F}$$

Hierin is T de halveringstijd in jaren, F de gebruiksfrequentie en c een constante.

50 Bereken de waarde van c in deze formule. Rond je antwoord af op duizendtallen.

©ThiemeMeulenhoff

In een artikel in het dagblad *Trouw* van 29 oktober 2007 werd het bovenstaande onderzoek besproken. Omdat men in de krant niet graag een formule gebruikt, stond de conclusie in woorden omschreven. Er stond:
‘ ..... gebruiken we een werkwoord tien keer zo vaak als een ander, dan is het honderd keer zo resistent tegen vormveranderingen.’
Met andere woorden: als een werkwoord 10 keer zo vaak gebruikt wordt, duurt het 100 keer zo lang voordat het regelmatig wordt.
Irene beweert dat deze conclusie niet klopt en dat het zou moeten zijn: als een werkwoord 100 keer zo vaak gebruikt wordt, duurt het 10 keer zo lang voordat het regelmatig wordt.

51 Beredeneer aan de hand van de formule $T = c \cdot \sqrt{F}$ dat Irene gelijk heeft.

©ThiemeMeulenhoff

Hints bij hoofdstuk 4a

1 Lees in de figuur begin- en eindpunt af en bereken daarmee de groeifactor.

2 Gebruik de rekenregel: $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$

3 Bereken *t* als *C* = 2.

4 Los *v* op uit de vergelijking *D* = 63.

5 Los de ongelijkheid $D_{DAB} - D_{ZOAB} > 3$ op.

6 Als de twee auto's met snelheid *v* en 2*v* rijden, is het verschil in geluidsniveaus $(28 \cdot \log(2v) + 16) - (28 \cdot \log(v) + 16)$. Herleid deze uitdrukking met de rekenregels voor logaritmen.

7 Lees de woordenschat op de 4e, 8e en 12e verjaardag af in de figuur.

8 Uit de gegevens volgt de groeifactor per negen jaar. Reken deze om naar een jaar.

9 De waarde van *a* in de formule is de gemiddelde jaarlijkse toename van de woordenschat. Deze kan uit de gegevens worden berekend.

10 De waarde van *b* (beginwaarde) moet worden aangepast omdat de formule 12 jaar eerder begint.

11 Sommige breuken zijn ongeveer 1 en log(1) = 0.

12 Gebruik de rekenregel ${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$.

13 Alles invullen en de *bbp*-breuk vrijmaken.

14 Zoek de bedoelde punten in de grafiek en lees hierbij de aantallen bezoekers af.

15 Vul *B* = 25 000 in de formule in en bereken vervolgens *r*. Dit kan algebraïsch of met de rekenmachine.

16 Schrijf de formule zonder negatieve exponent.

17 Gebruik de rekenregels voor logaritmen:
${}^g\log(ab) = {}^g\log(a) + {}^g\log(b)$ en ${}^g\log(a^p) = p \cdot {}^g\log(a)$

18 Uit de groeifactor over 6000 jaar volgt de groeifactor per jaar.

19 *N* = 9,5 invullen. Los de vergelijking die je dan vindt op.

20 $0{,}999878^t$ moet gelijk zijn aan e^{at}. Gebruik $g^{p \cdot q} = (g^p)^q$.

21 Zoek in de figuur een makkelijk af te lezen punt en vul de gegevens in.

22 *r* is nog 2,2. Start met 10^6 bacteriën.

23 Lijn door $(0, 10^6)$ en een tweede (nog te berekenen) punt trekken.

24 Het gaat om de snelheid van verandering, dus om de afgeleide functie.

25 *A* en *B* heten omgekeerd evenredig als $A \cdot B$ = constant.

26 Aantallen voor 1850 en 1950 berekenen met de formule. Dan uitrekenen hoeveel procent de formule meer geeft dan de schatting.

27 Oplossen *N* = 20 000. Dat kan algebraïsch of met de rekenmachine.

28 Bereken de groeifactor per 50 jaar en reken die om naar 1 jaar.

29 Lees het groeipercentage in de tabel af, maak er een groeifactor van en stel een vergelijking op.

30 Bereken het aantal baby's voor elk jaar apart of gebruik de sigmafunctie op de rekenmachine.

©ThiemeMeulenhoff

31 De groeifactor voor 5730 jaar is 0,5.

32 *t* = 60 000 invullen.

33 Gebruik de rekenregels ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$ en ${}^g\log(a^p) = p \cdot {}^g\log(a)$.

34 Berekende ouderdom via de figuur omzetten naar de werkelijke ouderdom. Dan nog terugrekenen vanaf 1950.

35 Lineair interpoleren tussen de gegeven punten. Maak een schetsje van de situatie.

36 Lees in de figuur de waarde van *E* af bij het punt dat hoort bij *L* = 100.

37 Differentiëren met de kettingregel. Daarna redeneren met de afgeleide.

38 $e^{-0{,}01L}$ daalt naar nul als *L* zeer groot wordt.

39 Omdat dialect *X* en dialect *Lunteren* allebei 'zich' gebruiken moeten ze op drie van de vier overige kenmerken verschillen.

40 Aantal combinaties van 2 uit 267.

41 Lees de coördinaten af van twee punten op de rechte lijn en bereken daaruit de richtingscoëfficiënt.

42 Gebruik de rekenregel ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$

43 Oplosmiddel toevoegen verlaagt de concentratie.

44 Bereken de concentratie van bupivacaïne in het mengsel van de vijf ampullen.

45 De groeifactor voor 2,5 uur is 0,5.

46 Combinaties bij elkaar puzzelen die samen 3600 punten kosten.

47 Marieke zal eerst elk artikel 100 punten geven om maximaal voordeel te hebben.

48 Bereken voor elke stap de groeifactor per 1000 punten. Let op de verschillende stapgroottes.

49 Gebruik de groeifactor per 1200 jaar, of die per jaar.

50 Vul de gegevens uit de tabel in. Het maakt niet uit of je de gegevens van klasse 3 of klasse 4 gebruikt.

51 Vervang in de formule *F* door 100*F*.

©ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij hoofdstuk 4a

Containers

1 De concentratie fosfine in container 1 neemt af van 405 mg/m^3 (op 10-08-2006) naar 40 mg/m^3 (op 17-08-2006) dus de groeifactor per 7 dagen is $\frac{40}{405} = 0{,}0987...$

De groeifactor per dag is $\left(\frac{40}{405}\right)^{\frac{1}{7}} = 0{,}7184...$ dus na een dag is nog ongeveer 72% van de fosfine over.
Per dag neemt de concentratie met fosfine in container 1 met ongeveer 28% af.

2 $C = 0{,}75^{t-20{,}6} = 0{,}75^t \cdot 0{,}75^{-20{,}6} \approx 0{,}75^t \cdot 374{,}75 \;\Leftrightarrow\; C = 374{,}75 \cdot 0{,}75^t$

3 Eerst het tijdstip t berekenen waarop de concentratie C gelijk is aan 2:
$C = 2 \;\Leftrightarrow\; 0{,}75^{t-20{,}6} = 2 \;\Leftrightarrow\; t - 20{,}6 = {}^{0{,}75}\log(2) \;\Leftrightarrow\; t = 20{,}6 + {}^{0{,}75}\log(2) \approx 18{,}2$
dus ruim 18 dagen na 10 augustus is de concentratie fosfine onder de alarmeringswaarde gezakt. Dat is op 29 augustus.

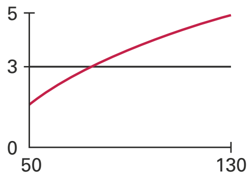
Asfaltbetonwegen

4 De bewoners horen iets van het verkeer als het geluidsniveau ten minste 63 dB is.
Het verkeer op de ZOAB-weg produceert 63 dB als geldt: $28 \cdot \log(v) + 16 = 63 \;\Leftrightarrow$

$28 \cdot \log(v) = 47 \;\Leftrightarrow\; \log(v) = \frac{47}{28} = 1{,}678... \;\Leftrightarrow\; v = 10^{1{,}678...} \approx 47{,}705... \;\Rightarrow$

als de snelheid 48 km/uur of hoger is, horen de bewoners het verkeer.

5 Bij welke snelheden is het verschil tussen D_{DAB} en D_{ZOAB} meer dan 3 dB?
Eerst berekenen bij welke snelheid het verschil precies 3 is: $D_{DAB} - D_{ZOAB} = 3 \;\Leftrightarrow$
$(36 \cdot \log(v) + 4) - (28 \cdot \log(v) + 16) = 3$
Voer in de rekenmachine in $y_1 = (36 \cdot \log(x) + 4) - (28 \cdot \log(x) + 16)$ en $y_2 = 3$.



De optie *intersect/snijpunt* geeft $x = 74{,}989...$
Bij snelheden vanaf 75 km/uur is het verschil tussen D_{DAB} en D_{ZOAB} meer dan 3 dB.
andere manier
De vergelijking $(36 \cdot \log(v) + 4) - (28 \cdot \log(v) + 16) = 3$ kan ook algebraïsch worden opgelost: $36 \cdot \log(v) + 4 - 28 \cdot \log(v) - 16 = 3 \;\Leftrightarrow\; 8 \cdot \log(v) = 15 \;\Leftrightarrow$

$\log(v) = \frac{15}{8} = 1{,}875 \;\Leftrightarrow\; v = 10^{1{,}875} = 74{,}989...$

Bij snelheden vanaf 75 km/uur is het verschil tussen D_{DAB} en D_{ZOAB} meer dan 3 dB.

6 Als de langzaamste auto een snelheid v heeft dan produceert deze een geluidsniveau $28 \cdot \log(v) + 16$. De snelste auto heeft dan snelheid $2v$ en produceert geluidsniveau $28 \cdot \log(2v) + 16$.
Het verschil in geluidsniveaus tussen deze twee auto's is dan:
$(28 \cdot \log(2v) + 16) - (28 \cdot \log(v) + 16) = 28 \cdot \log(2v) - 28 \cdot \log(v) =$

$28 \cdot (\log(2v) - \log(v)) = 28 \cdot \log\left(\frac{2v}{v}\right) = 28 \cdot \log(2)$

De uitkomst $28 \cdot \log(2)$ is een constante (ongeveer 8,4 dB).

Woordenschat

7 De woordenschat bij de genoemde leeftijden kan in de figuur worden afgelezen.

leeftijd	4	8	12
aantal woorden	3000	6000	17 000

Tussen de 4e en de 8e verjaardag is de toename 3000 woorden.

Dat zijn er gemiddeld $\frac{3000}{4} = 750$ per jaar.

Tussen de 8e en de 12e verjaardag is de toename 11 000 woorden.

Dat zijn er gemiddeld $\frac{11\,000}{4} = 2750$ per jaar.

De gemiddelde woordenschat groeit tussen de 8e en de 12e verjaardag met 2000 woorden per jaar meer dan tussen de 4e en de 8e verjaardag.

8 De woordenschat groeit met factor $\frac{150\,000}{17\,000}$ in 9 jaar, dus met $\left(\frac{150\,000}{17\,000}\right)^{\frac{1}{9}} = 1{,}27371...$ per jaar. Afgerond op drie decimalen is de groeifactor 1,274 per jaar.

9 In de formule $W_l = at + b$ is a de jaarlijkse toename ('helling') van de woordenschat.

De woordenschat groeit met $\frac{45\,000 - 17\,000}{9} \approx 3111$ woorden per jaar, dus $a = 3111$.

Op de 12e verjaardag kennen jongeren met een lage woordenschat 17 000 woorden.
Op de 18e verjaardag, 6 jaar later, is de woordenschat $W_l = 6 \cdot 3111 + 17\,000 = 35\,666$ woorden.
Opgelost moet worden: $W_h = 17\,000 \cdot 1{,}27^t = 35\,666$ woorden.

$17\,000 \cdot 1{,}27^t = 35\,666 \;\Leftrightarrow\; 1{,}27^t = \frac{35\,666}{17\,000} \;\Leftrightarrow\; t = {}^{1{,}27}\log\left(\frac{35\,666}{17\,000}\right) = 3{,}1001...$ jaar

0,1001... jaar = 0,1001... × 12 ≈ 1 maand
$t = 0$ op de 12e verjaardag dus jongeren met een hoge woordenschat bereiken op een leeftijd van 15 jaar en 1 maand een woordenschat van 35 666 woorden.
Dat is 2 jaar en 11 maanden eerder, dus 35 maanden eerder dan jongeren met een lage woordenschat.
De vergelijking $17\,000 \cdot 1{,}27^t = 35\,666$ mag ook met de rekenmachine worden opgelost.

10 De groeifactor verandert niet, dus $g = 1{,}27$.
Op de 12e verjaardag, dus als $L = 12$, moet de formule $W_h = b \cdot 1{,}27^{12}$ de uitkomst 17 000 geven: $b \cdot 1{,}27^{12} = 17\,000 \;\Leftrightarrow\; b = \frac{17\,000}{1{,}27^{12}} = 965{,}6...$

Afgerond op tientallen: $b \approx 970$
De formule wordt dan: $W_h = 970 \cdot 1{,}27^L$

Doelpunten

11 $pop(\text{Italië}) \approx pop(\text{Engeland}) \;\Rightarrow\; \log\left(\frac{pop(\text{Italië})}{pop(\text{Engeland})}\right) \approx \log(1) = 0$

$bbp(\text{Italië}) \approx bbp(\text{Engeland}) \;\Rightarrow\; \log\left(\frac{bbp(\text{Italië})}{bbp(\text{Engeland})}\right) \approx \log(1) = 0$

$erv(\text{Italië}) = 16$ en $erv(\text{Engeland}) = 12$
Alle gegevens invullen in de formule:

$GD(\text{Italië, Engeland}) = 0{,}316 \cdot 0 + 0{,}334 \cdot 0 + 1{,}702 \cdot \log\left(\frac{16}{12}\right) = 0{,}2126... \approx 0{,}21$

Als Italië tegen Engeland zou spelen, voorspelt de formule dat Italië 0,21 doelpunt meer maakt dan Engeland.

12 Uit de rekenregel ${}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log\left(\frac{a}{b}\right)$ volgt:

$$\log\left(\frac{pop(A)}{pop(B)}\right) = \log(pop(A)) - \log(pop(B)) = -(\log(pop(B)) - \log(pop(A))) = -\log\left(\frac{pop(B)}{pop(A)}\right)$$

$$\log\left(\frac{bbp(A)}{bbp(B)}\right) = \log(bbp(A)) - \log(bbp(B)) = -(\log(bbp(B)) - \log(bbp(A))) = -\log\left(\frac{bbp(B)}{bbp(A)}\right)$$

$$\log\left(\frac{erv(A)}{erv(B)}\right) = \log(erv(A)) - \log(erv(B)) = -(\log(erv(B)) - \log(erv(A))) = -\log\left(\frac{erv(B)}{erv(A)}\right)$$

Met deze drie herleidingen volgt GD(A, B) = –GD(B, A).

13 Alle gegevens invullen in de formule geeft de vergelijking:

$$-0{,}67 = 0{,}316 \cdot \log\left(\frac{16{,}6}{185{,}7}\right) + 0{,}334 \cdot \log\left(\frac{bbp(\text{Ned})}{bbp(\text{Bra})}\right) + 1{,}702 \cdot \log\left(\frac{8}{18}\right) \Leftrightarrow$$

$$-0{,}67 \approx -0{,}3314 + 0{,}334 \cdot \log\left(\frac{bbp(\text{Ned})}{bbp(\text{Bra})}\right) - 0{,}5994 \Leftrightarrow$$

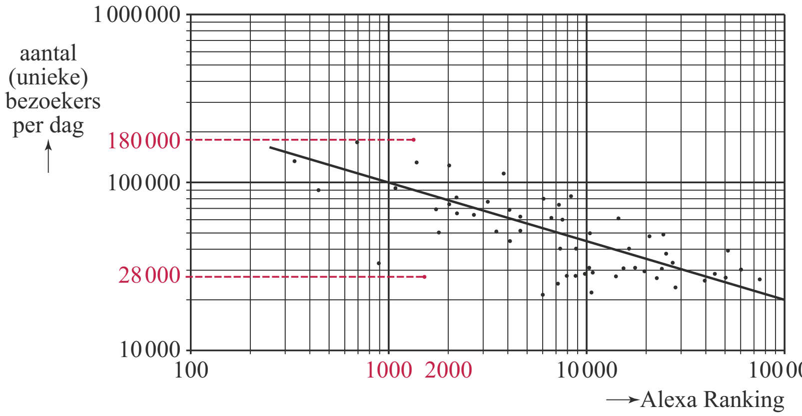
$$0{,}2608 \approx 0{,}334 \cdot \log\left(\frac{bbp(\text{Ned})}{bbp(\text{Bra})}\right) \Leftrightarrow \log\left(\frac{bbp(\text{Ned})}{bbp(\text{Bra})}\right) \approx \frac{0{,}2608}{0{,}334} \approx 0{,}7808 \Leftrightarrow$$

$$\frac{bbp(\text{Ned})}{bbp(\text{Bra})} \approx 10^{0{,}7808} \approx 6{,}04 \Leftrightarrow bbp(\text{Ned}) \approx 6{,}04 \cdot bbp(\text{Bra})$$

Het *bbp* van Nederland is ongeveer 6 keer zo groot als dat van Brazilië.

Websites

14 Voor punten met 1000 < *Alexa Ranking* < 2000 is het grootste verschil in aantallen bezoekers te vinden bij de twee rode stippen in de figuur. Bij het bovenste punt horen ongeveer 180 000 bezoekers per dag, bij het onderste punt ongeveer 28 000 per dag.



Het maximale verschil is ongeveer 180 000 – 28 000 = 152 000 bezoekers per dag.

15 Als het aantal unieke bezoekers per dag B = 25 000 dan volgt de *Alexa Ranking* uit:

$$25\,000 = 1\,118\,000 \cdot r^{-0{,}35} \Leftrightarrow 25\,000 = \frac{1\,118\,000}{r^{0{,}35}} \Leftrightarrow r^{0{,}35} = \frac{1\,118\,000}{25\,000} \Leftrightarrow$$

$$r = \left(\frac{1\,118\,000}{25\,000}\right)^{\frac{1}{0{,}35}} \approx 51\,966$$

16 $B = 1\,118\,000 \cdot r^{-0{,}35} \Leftrightarrow B = \frac{1\,118\,000}{r^{0{,}35}}$. Uit deze laatste formule volgt:
als r stijgt, dan stijgt ook $r^{0{,}35}$, maar dan daalt $B = \frac{1\,118\,000}{r^{0{,}35}}$.
Dus voor stijgende r daalt de grafiek van B.

17 Uit $B = 1\,118\,000 \cdot r^{-0{,}35}$ volgt:

$$\log(B) = \log(1\,118\,000 \cdot r^{-0{,}35}) \Rightarrow \log(B) = \log(1\,118\,000) + \log(r^{-0{,}35}) \Rightarrow$$

$$\log(B) = \log(1\,118\,000) - 0{,}35 \cdot \log(r) \Rightarrow$$

$a = \log(1\,118\,000) \approx 6{,}05$ en $b = -0{,}35$

Archeologie

18 In 6000 jaar daalt de gemeten radioactiviteit van 12,5 naar 6 cpm per gram.
De groeifactor over 6000 jaar is $\frac{6}{12{,}5} = 0{,}48$.

De groeifactor per jaar is $(0{,}48)^{\frac{1}{6000}} = 0{,}99987767...$

Afgerond op zeven decimalen: 0,9998777

19 Als N = 9,5 geldt volgens de gegeven formule:

$$9{,}5 = 12{,}5 \cdot 0{,}999878^{t} \Leftrightarrow 0{,}999878^{t} = \frac{9{,}5}{12{,}5} = 0{,}76 \Leftrightarrow t = {}^{0{,}999878}\log(0{,}76) \approx 2249 \text{ jaar}$$

Deze vergelijking kan ook met de rekenmachine worden opgelost:
vul in $y_1 = 12{,}5 \cdot 0{,}999878^{t}$ en $y_2 = 9{,}5$. Intersect/snijpunt geeft $x \approx 2249$.
Vanaf 1949 terugrekenen: 1949 – 2249 = –300. Het stuk hout dateert van 300 jaar voor Chr.
De deskundigen schatten echter dat het stuk hout dateert uit 200 voor Chr.
Het verschil tussen de datering van de C14-methode en de deskundigen is ongeveer 100 jaar.

20 $12{,}5 \cdot 0{,}999878^{t} = 12{,}5 \cdot e^{at} \Leftrightarrow 0{,}999878t = (e^{a})^{t} \Leftrightarrow 0{,}999878 = e^{a} \Leftrightarrow$
$a = \ln(0{,}999878) = -0{,}000122$

Sterilisatie

21 In de figuur kan worden afgelezen dat er na 6 minuten nog 10^2 levende bacteriën zijn, dus $N(6) = 10^2$. Deze gegevens invullen in de gegeven formule $N(t) = 10^6 \cdot 2^{-r \cdot t}$:

$$10^2 = 10^6 \cdot 2^{-r \cdot 6} \Rightarrow 10^{-4} = 2^{-6r} \Rightarrow -6r = {}^{2}\log(10^{-4}) \Rightarrow r = \frac{{}^{2}\log(10^{-4})}{-6} \approx 2{,}2$$

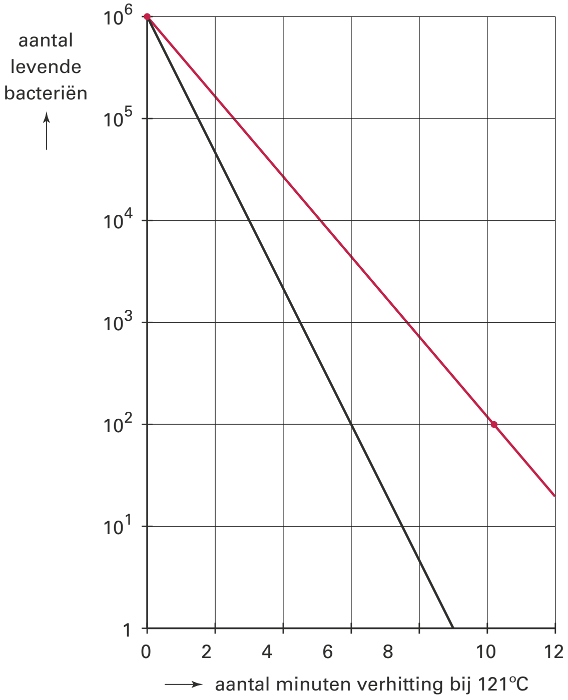
De vergelijking $10^2 = 10^6 \cdot 2^{-r \cdot 6}$ mag ook met de rekenmachine worden opgelost.

22 Voor deze bacterie geldt $r \approx 2{,}2$. Het oorspronkelijke aantal bacteriën is 10^6, dus 10% daarvan is 10^5. De D-waarde kan nu berekend worden uit:

$$10^5 = 10^6 \cdot 2^{-2{,}2t} \Rightarrow 0{,}1 = 2^{-2{,}2t} \Rightarrow -2{,}2t = {}^{2}\log(0{,}1) \Rightarrow t = \frac{{}^{2}\log(0{,}1)}{-2{,}2} = 1{,}50996..$$

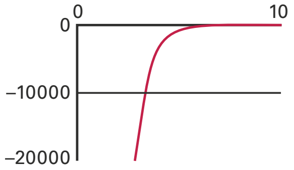
De D-waarde is ongeveer 1,5 minuut.
De vergelijking $10^5 = 10^6 \cdot 2^{-2{,}2t}$ mag ook met de rekenmachine worden opgelost.
In de figuur kan de D-waarde worden afgelezen op de plaats waar de rechte lijn het niveau 10^5 bereikt. Dit geeft ook ongeveer 1,5 minuut.

23 De D-waarde van deze bacterie is 2,55 minuten $\Rightarrow$ in 2,55 minuten wordt het aantal levende bacteriën gereduceerd tot 10% dus de groeifactor per 2,55 minuten is 0,1.
Na (bijvoorbeeld) $4 \cdot 2{,}55 = 10{,}2$ minuten is het aantal levende bacteriën gedaald van 10^6 naar 10^2 (want $10^6 \cdot 0{,}1^4 = 10^2$).



De overlevingsgrafiek is de rechte lijn door de punten $(0, 10^6)$ en $(10{,}2;\ 10^2)$.

24 $N(t) = 10^6 \cdot 2^{-2{,}2 \cdot t} \Rightarrow N'(t) = 10^6 \cdot 2^{-2{,}2 \cdot t} \cdot \ln(2) \cdot -2{,}2$
Voor welke waarde van t is de afgeleide gelijk aan $-10\,000$?
Voer in de rekenmachine in $y_1 = 10^6 \cdot 2^{-2{,}2 \cdot x} \cdot \ln(2) \cdot -2{,}2$ en $y_2 = -10\,000$.



De optie *intersect/snijpunt* geeft $x = 3{,}296...$
Na ongeveer 3,3 minuten neemt het aantal bacteriën af met 10 000 per minuut.

25 Bij de D-waarde hoort groeifactor 0,1 dus $2^{-r \cdot D} = 0{,}1 \Leftrightarrow$
$-r \cdot D = {}^2\log(0{,}1) \Leftrightarrow r \cdot D = -{}^2\log(0{,}1)$
$r \cdot D$ is constant dus r en D zijn omgekeerd evenredig.

Wereldbevolking

26 In 1850 geeft de formule $N(1850) = 0{,}0101 \cdot 1{,}0065^{1850} \approx 1621$ miljoen bewoners.
$\frac{1621}{1265} \approx 1{,}28$ dus de formule geeft 28% meer dan de schatting.
In 1950 geeft de formule $N(1950) = 0{,}0101 \cdot 1{,}0065^{1950} \approx 3099$ miljoen bewoners.
$\frac{3099}{2516} \approx 1{,}23$ dus de formule geeft 23% meer dan de schatting.
Van deze twee jaren heeft 1850 de grootste procentuele afwijking.

27 20 miljard = 20 000 miljoen, dus oplossen $N = 20\,000$:
$0{,}0101 \cdot 1{,}0065^t = 20\,000 \Leftrightarrow 1{,}0065^t = \frac{20\,000}{0{,}0101} \Leftrightarrow t = {}^{1{,}0065}\log\left(\frac{20\,000}{0{,}0101}\right) = 2237{,}8...$
dus vanaf 2238 is de aarde te ‘klein’ (of: in de loop van 2237 is de aarde te ‘klein’).

28 De wereldbevolking groeide in 50 jaar van 1656 naar 2516 miljoen, dus de groeifactor per 50 jaar was $\frac{2516}{1656} = 1{,}519...$ en de groeifactor per jaar was $(1{,}519...)^{\frac{1}{50}} = 1{,}0084003...$
dus het ontbrekende groeipercentage in vier decimalen was 0,8400%.

29 Tussen 1750 en 1850 was het groeipercentage 0,4656 per jaar dus de groeifactor was 1,004656 per jaar. Een formule die de groei in deze periode beschrijft is
$N = 795 \cdot 1{,}004656^t$ met t in jaren en $t = 0$ in 1750.
1 miljard is 1000 miljoen dus oplossen: $795 \cdot 1{,}004656t = 1000 \Leftrightarrow$
$1{,}004656^t = \frac{1000}{795} \Leftrightarrow t = {}^{1{,}004656}\log\left(\frac{1000}{795}\right) = 49{,}3...$ jaar, dus het model van Haub bereikt in de loop van 1799 de grens van 1 miljard mensen (of: in 1800 waren er voor het eerst meer dan 1 miljard mensen).

30 Voor elk jaar t in deze periode geldt dat er $\frac{23}{1000} \cdot 5760 \cdot 1{,}01092^t$ baby’s werden geboren.
Het totaal aantal baby’s in deze periode van 8 jaar is:
$\frac{23}{1000} \cdot 5760 \cdot 1{,}01092^0 + \frac{23}{1000} \cdot 5760 \cdot 1{,}01092^1 + ... + \frac{23}{1000} \cdot 5760 \cdot 1{,}01092^7$
De rekenmachine geeft $\sum_{t=0}^{7}\left(\frac{23}{1000} \cdot 5760 \cdot 1{,}01092^t\right) = 1101{,}24...$ dus in de periode 1995 – 2002 werden ongeveer 1101 miljoen baby’s geboren.

Koolstofdatering

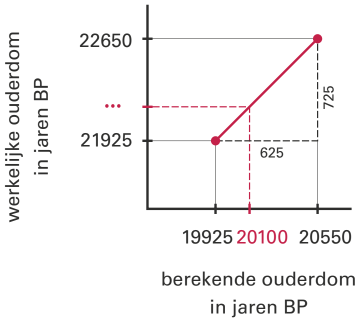
31 De halveringstijd is 5730 jaar dus $g^{5730} = 0{,}5 \Leftrightarrow g = 0{,}5^{\frac{1}{5730}} = 0{,}999879039...$
Afgerond op zes decimalen: $g = 0{,}999879$.

32 $100 \cdot 0{,}999879^{60\,000} = 0{,}0702...$ dus dan is er nog ongeveer 0,07% over van de oorspronkelijke 100%.

33 $Q = 100 \cdot 0{,}99988^t \Leftrightarrow \ln(Q) = \ln(100 \cdot 0{,}99988^t) = \ln(100) + \ln(0{,}99988^t) \Leftrightarrow$
$\ln(Q) = \ln(100) + t \cdot \ln(0{,}99988) \Leftrightarrow t \cdot \ln(0{,}99988) = \ln(Q) - \ln(100) \Leftrightarrow$
$t = \frac{\ln(Q) - \ln(100)}{\ln(0{,}99988)} \approx \frac{\ln(Q) - 4{,}6052}{-0{,}00012}$ want $\ln(100) = 4{,}60517...$ en
$\ln(0{,}99988) = -1{,}20... \cdot 10^{-4}$

34 $Q = 73{,}19$ invullen geeft : $t = \frac{\ln(73{,}19) - 4{,}6052}{-0{,}00012} \approx 2601$ jaar. Dit is de berekende ouderdom in jaren BP.
Aflezen in de grafiek: bij een berekende ouderdom van 2601 jaar hoort een werkelijke ouderdom van 2750 jaar BP.
2750 jaar terugrekenen vanaf 1950 geeft dat de kano 800 jaar voor het begin van de jaartelling gemaakt is.

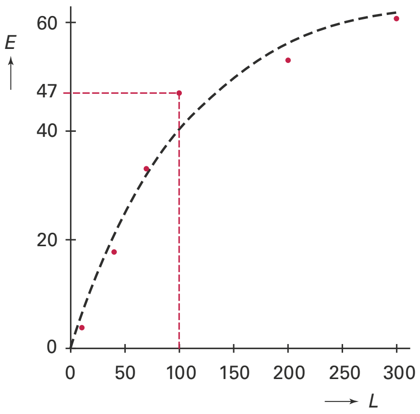
35 In de 625 jaar van de berekende ouderdom neemt de werkelijke ouderdom met 725 jaar toe, dus per berekend jaar neemt de werkelijke ouderdom met $\frac{725}{625}$ jaar toe.



20 100 – 19 925 = 175 dus bij een berekende ouderdom van 20 100 jaar is de werkelijke ouderdom $21\,925 + 175 \cdot \frac{725}{625} = 22\,128$ jaar.
Afgerond op tientallen is de werkelijke ouderdom 22 130 jaar.
De gegevens langs de assen zijn hierboven anders georganiseerd dan in de opgave.

Sluipwespen

36 Aflezen in de figuur: het punt met $L = 100$ heeft een E-waarde 47.



$L = 100$ invullen in de formule geeft $E = 64 \cdot (1 - e^{-0{,}01 \cdot 100}) = 40{,}45...$ dus 40 larven.
Het verschil tussen het gemeten en het berekende aantal is 7 larven.

37 $E = 64 \cdot (1 - e^{-0{,}01L}) = 64 - 64 \cdot e^{-0{,}01L} \Rightarrow$
$E' = -64 \cdot e^{-0{,}01L} \cdot -0{,}01 = 0{,}64 \cdot e^{-0{,}01L} = 0{,}64 \cdot (e^{-0{,}01})^L \approx 0{,}64 \cdot 0{,}99^L$
De afgeleide functie is positief maar dalend als L toeneemt omdat de groeifactor 0,99 kleiner is dan 1. Als E' positief en dalend is, dan zal de grafiek van E steeds minder snel stijgen bij toenemende L.

38 $E = 64 \cdot (1 - e^{-0{,}01L}) = 64 - 64 \cdot e^{-0{,}01L} = 64 - 64 \cdot (e^{-0{,}01})^L \Rightarrow E \approx 64 - 64 \cdot 0{,}99^L$
De term $64 \cdot 0{,}99^L$ daalt (asymptotisch) naar nul als L toeneemt (zie vorige vraag), dus E stijgt dan naar 64. De grenswaarde van E is dus 64.

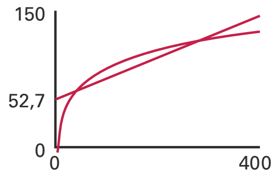
Dialecten vergelijken

39 Dialect X moet vergeleken worden met het dialect van Lunteren. Beide dialecten gebruiken 'zich' dus daar is geen verschil. De Hammingafstand is 3 dus op drie van vier overige kenmerken moeten Dialect X en Lunteren verschillen. Op één van de vier overige kenmerken scoren Dialect X en Lunteren gelijk. Dan zijn er vier mogelijkheden.

	Lunteren	Dialect X			
zich	+	+	+	+	+
hem	–	–	+	+	+
z'n eigen	+	–	+	–	–
zichzelf	–	+	+	–	+
hemzelf	–	+	+	+	–

40 Voor elke Hammingafstand moeten 2 dialecten uit 267 gekozen worden. Dit kan op $\binom{267}{2} = 35\,511$ manieren.
andere manier
Voor het kiezen van het eerste dialect zijn er 267 mogelijkheden, daarna zijn er voor het tweede dialect nog 266 mogelijkheden over. Dit geeft $267 \times 266 = 71\,022$ mogelijkheden maar dan zijn alle combinaties dubbel geteld *(ook in tabel 2 staat elke Hamming-afstand tweemaal vermeld)* dus er zijn eigenlijk 35 511 Hammingafstanden berekend.

41 Op de getekende rechte lijn liggen de punten (10, 55) en (400, 145).
De richtingscoëfficiënt van deze lijn is $\frac{145 - 55}{400 - 10} = \frac{9}{39} = 0{,}230769... \approx 0{,}23$.
Een formule voor de lijn heeft de vorm $H = 0{,}23x + b$.
Invullen van (10, 55) geeft: $55 = 0{,}23 \cdot 10 + b \Leftrightarrow 55 = 2{,}3 + b \Leftrightarrow b = 52{,}7$.
Een formule van het lineaire verband is $H = 0{,}23x + 52{,}7$.
De Hammingafstanden volgens het lineaire en het logaritmische verband zijn gelijk als $0{,}23x + 52{,}7 = -45{,}88 + 28{,}85 \cdot \ln(x)$
Voer in de rekenmachine in $y_1 = 0{,}23x + 52{,}7$ en $y_2 = -45{,}88 + 28{,}85 \cdot \ln(x)$ en bereken met *intersect/snijpunt* de snijpunten.
Dit geeft $x = 42{,}90...$ en $x = 276{,}70...$
Afgerond op hele kilometers is dat 43 km en 277 km.
Als met een ander (nauwkeuriger) lineair verband is gerekend, kunnen de antwoorden iets afwijken.



42 Uit de rekenregel ${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(ab)$ volgt $\ln(2) + \ln(x) = \ln(2x)$ dus
$-45{,}88 + 28{,}85 \cdot \ln(2x) = -45{,}88 + 28{,}85 \cdot (\ln(2) + \ln(x)) =$
$-45{,}88 + 28{,}85 \cdot \ln(2) + 28{,}85 \cdot \ln(x) = -45{,}88 + 19{,}997... + 28{,}85 \cdot \ln(x) \approx$
$-45{,}88 + 20 + 28{,}85 \cdot \ln(x) = -45{,}88 + 28{,}85 \cdot \ln(x) + 20$

Dus bij een verdubbeling van de geografische afstand neemt de Hammingafstand inderdaad met 20 toe.

Morfine

43 Een morfine-3% oplossing bevat 3 gram morfine per 100 milliliter. Met 3 gram morfine kun je een morfine-1% oplossing maken door het op te lossen in 300 milliliter oplosmiddel. Per 100 milliliter morfine-3% moet dus 200 milliliter oplosmiddel worden toegevoegd.

44 100 ml bupivacaïne-0,5% oplossing bevat 0,5 gram = 500 mg bupivacaïne.
Per 10 ml oplossing zit er dus 50 mg bupivacaïne in.
Twee ampullen van elk 10 ml bevatten tezamen 100 mg bupivacaïne.
De vijf ampullen samen bevatten 50 ml oplossing. Als deze ampullen worden gemengd, bevat de gemengde oplossing van 50 ml dan 100 mg bupivacaïne.
Elke ml van de gemengde oplossing bevat dus 2 mg bupivacaïne.
De patiënt krijgt 3,5 ml van de gemengde oplossing per uur waarin 7 mg bupivacaïne is opgelost.

45 De hoeveelheid morfine in het lichaam wordt in 2,5 uur gehalveerd, dus de groeifactor per 2,5 uur is 0,5.

De groeifactor per uur is dan $0{,}5^{\frac{1}{2{,}5}}$ of $\sqrt[2{,}5]{0{,}5} = 0{,}7578...$

De groeifactor per zes uur is dus $\left(0{,}5^{\frac{1}{2{,}5}}\right)^6$ of $\left(\sqrt[2{,}5]{0{,}5}\right)^6 = 0{,}189...$

Zes uur na de injectie is er nog ongeveer 19% van de oorspronkelijke hoeveelheid morfine in het lichaam.

Waardepunten

46
1. Zes maal theekop en schotel kost $6 \cdot 600 = 3600$ punten
2. Acht theelepeltjes kosten $8 \cdot 450 = 3600$ punten.
3. Drie maal theekop en schotel plus vier theelepeltjes kosten $3 \cdot 600 + 4 \cdot 450 =$ 3600 punten.
4. Drie theeglazen plus twee theelepeltjes plus een theekop en schotel kosten $3 \cdot 700 + 2 \cdot 450 + 600 = 3600$ punten.

47 Marieke gaat in totaal voor $6 \cdot 9{,}30 + 46{,}50 = 102{,}30$ euro artikelen kopen.
De eerste 100 punten per artikel zijn 1,50 euro waard. Voor elk van de zes bordjes en voor het taartplateau geeft ze 100 punten, samen 700 punten, ter waarde van $7 \cdot 1{,}50 = 10{,}50$ euro.

De overige $12\,000 - 700 = 11\,300$ punten zijn $\frac{11\,300}{100} \cdot 0{,}5 = 56{,}50$ euro waard.

Met alle punten samen kan Marieke $10{,}50 + 56{,}50 = 67$ euro betalen. Ze moet dus nog $102{,}30 - 67 = 35{,}30$ euro bijbetalen.

©ThiemeMeulenhoff

48 *De tabel maakt eerst stappen van 1000 punten, later stappen van 2000 punten.*

$\frac{2{,}14}{1{,}50} \approx 1{,}427$ per 1000 punten

$\frac{3{,}06}{2{,}14} \approx 1{,}430$ per 1000 punten

$\frac{4{,}37}{3{,}06} \approx 1{,}428$ per 1000 punten

$\frac{8{,}90}{4{,}37}$ per 2000 punten dus $\left(\frac{8{,}90}{4{,}37}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}427$ per 1000 punten

$\frac{18{,}15}{8{,}90}$ per 2000 punten dus $\left(\frac{18{,}15}{8{,}90}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}428$ per 1000 punten

$\frac{37{,}01}{18{,}15}$ per 2000 punten dus $\left(\frac{37{,}01}{18{,}15}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}428$ per 1000 punten

Voor alle waarden in de tabel voldoet een groeifactor van ongeveer 1,43 per 1000 punten, dus is er (bij benadering) sprake van een exponentieel verband.

Gebruik voor een benadering van de groeifactor in drie decimalen de eerste en laatste waarde:

$\frac{37{,}01}{1{,}50}$ per 9000 punten dus $\left(\frac{37{,}01}{18{,}15}\right)^{\frac{1}{2}} = 1{,}42788... \approx 1{,}428$ per 1000 punten.

Onregelmatige werkwoorden

49 Voor klasse 5 is de groeifactor per 1200 jaar gelijk aan $\frac{14}{50} = 0{,}28$.

Als de tijd t in eenheden van 1200 jaar gerekend wordt, kan de exponentiële afname beschreven worden met $0{,}28^t$. De halveringstijd volgt nu uit $0{,}28^t = 0{,}5 \Leftrightarrow$

$t = {}^{0{,}28}\log(0{,}5) = 0{,}5445...$

De halveringstijd voor klasse 5 is ${}^{0{,}28}\log(0{,}5) \cdot 1200 = 0{,}5445... \cdot 1200 \approx 653$ jaar.
Afgerond op honderdtallen is dit 700 jaar.
andere methode

0,28 is de groeifactor per 1200 jaar dus $(0{,}28)^{\frac{1}{1200}} \approx 0{,}9989...$ is de groeifactor per jaar.

De halveringstijd volgt nu uit $(0{,}9989...)^t = 0{,}5 \Leftrightarrow t = {}^{0{,}9989...}\log(0{,}5) \approx 653$ jaar.
Afgerond 700 jaar.

50 Voor klasse 3 geldt: $5400 = c \cdot \sqrt{1{,}6 \cdot 10^{-3}} = c \cdot \sqrt{0{,}0016} \Leftrightarrow c = \frac{5400}{\sqrt{0{,}0016}} = 135\,000$

Je kunt ook de gegevens van klasse 4 invullen. In dat geval moet c nog wel worden afgerond op duizendtallen.

51 Vervang in de formule F door $100F$: $T = c \cdot \sqrt{100F} = c \cdot \sqrt{100} \cdot \sqrt{F} = 10 \cdot (c \cdot \sqrt{F})$
Als F 100 keer zo groot wordt, wordt T inderdaad 10 keer zo groot, dus Irene heeft gelijk.

©ThiemeMeulenhoff

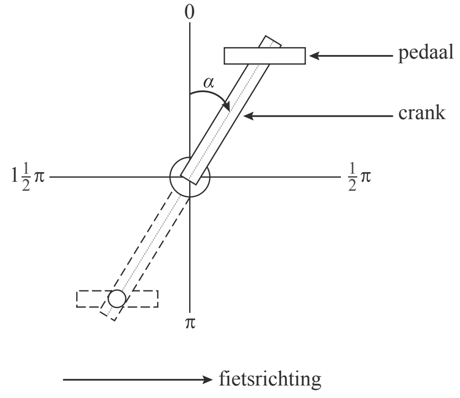
4b De sinus

Fietssnelheid

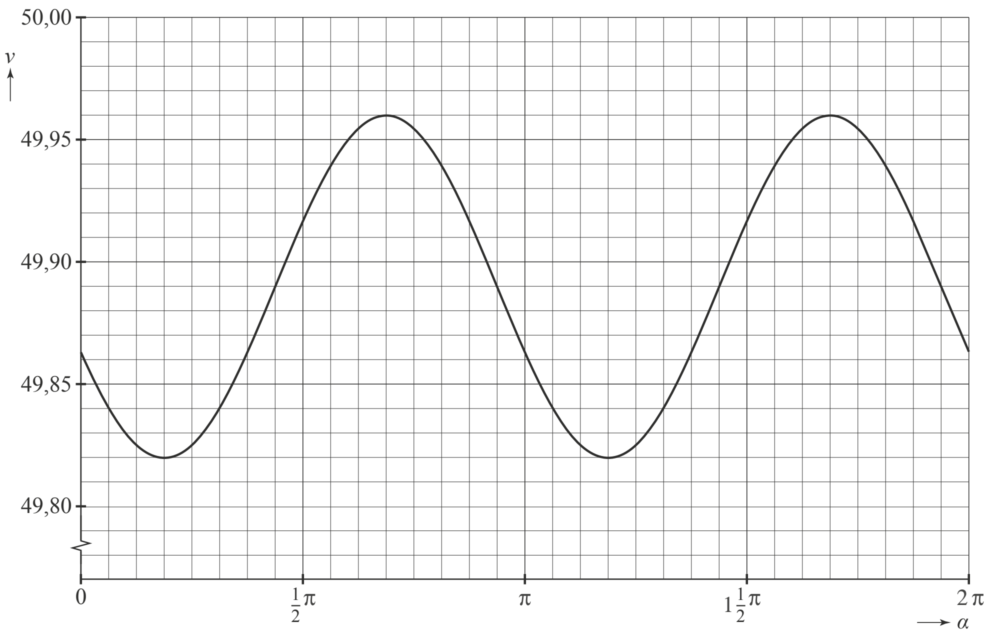
Fietsen met een constante snelheid is in de praktijk niet mogelijk omdat de kracht die op de pedalen wordt uitgeoefend, afhangt van de stand van de **crank**. De grootte van de hoek tussen de crank en de verticale richting in radialen noemen we α . Zie figuur 1.

In figuur 2 is de snelheid v van een wielrenner in km/uur uitgezet tegen α .

figuur 1



figuur 2



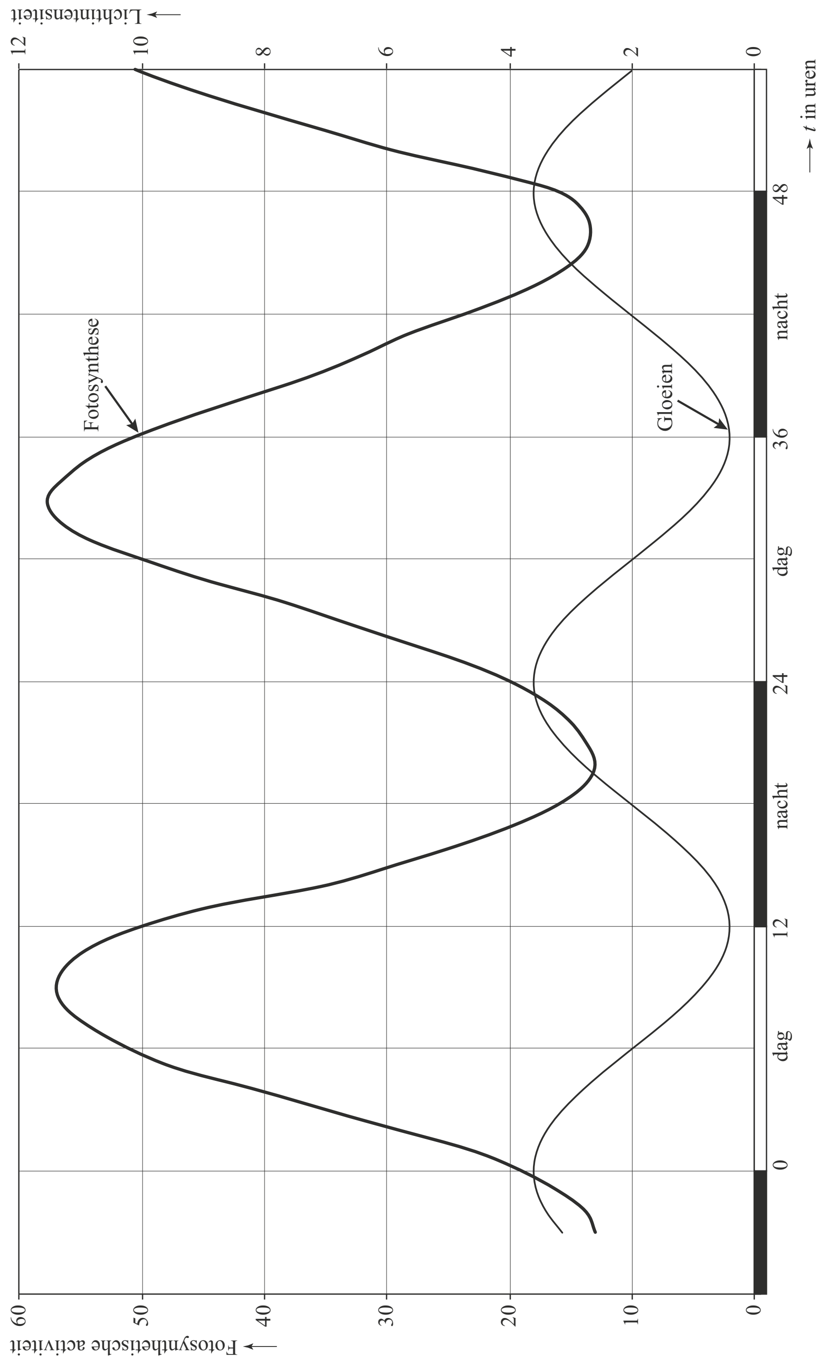
De grafiek in figuur 2 is te beschrijven met een formule van de vorm $v = p + q\sin(r(\alpha - s))$.

1 Bepaal mogelijke waarden van p, q, r en s.

©ThiemeMeulenhoff

Algen

Van een bepaald soort ééncellige algen (Gonyaulax polyedra) is het dag- en nachtritme onderzocht. De algen werden blootgesteld aan afwisselend 12 uur licht en 12 uur donker. Deze perioden noemen we respectievelijk dag en nacht.
In de figuur zijn resultaten van dit onderzoek te zien.



©ThiemeMeulenhoff

Eén van de gemeten activiteiten is fotosynthese, het opslaan van energie met behulp van (zon)licht. De intensiteit van de fotosynthese is weergegeven op de linker verticale as.
De grafiek voor de fotosynthese F als functie van de tijd, kan benaderd worden door een formule van de vorm:

$F = a + b\sin(c(t - 3))$

Hierbij is t de tijd in uren met $t = 0$ bij het begin van een dag.

2 Stel deze formule op. Licht je antwoord toe.

Sommige algen lichten vanzelf op in het donker. Dit verschijnsel, gloeien genaamd, is in de figuur ook met een grafiek weergegeven. De lichtintensiteit G werd gemeten in eenheden die langs de rechter verticale as zijn uitgezet.
Men kan de grafiek van het gloeien benaderen met de formule:

$G = 2{,}0 + 1{,}6\sin(\frac{1}{12}\pi(t - 18))$

Hierin is t weer de tijd in uren met $t = 0$ bij het begin van een dag.

Tijdens iedere periode van 24 uur is de lichtintensiteit van het gloeien gedurende een bepaalde tijd groter dan 3 eenheden.

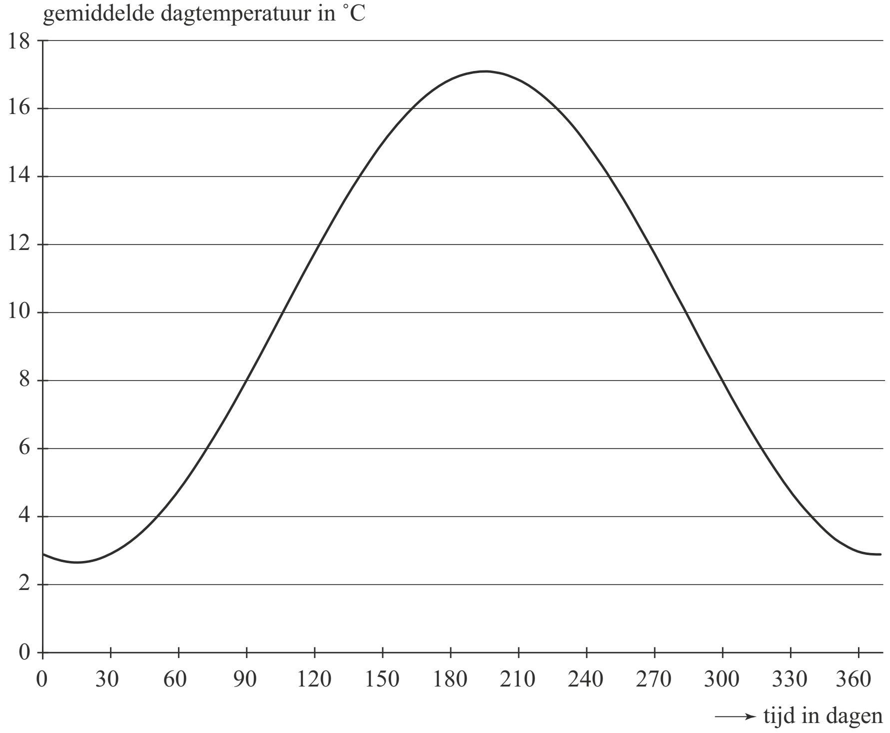
3 Bereken met behulp van de formule van G hoe lang de lichtintensiteit van het gloeien in een periode van 24 uur groter is dan 3 eenheden. Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

De lichtintensiteit bij gloeien is na een maximum eerst toenemend dalend en daarna afnemend dalend.

4 Onderzoek met behulp van een raaklijn aan de grafiek met welke snelheid de lichtintensiteit maximaal afneemt bij gloeien.

Zomer in Ukkel

Een Belgische onderzoeker houdt zich bezig met modellen voor het temperatuurverloop. Hij bekeek daarvoor de historische gegevens van het weerstation in Ukkel (België). Zie onderstaande figuur.



De vloeiende lijn geeft de gemiddelde dagtemperatuur per dag aan en is ontstaan uit gemiddelden van de dagtemperatuur, gemeten over verschillende jaren.
De gemiddelde dagtemperatuur is maximaal 17,1°C en minimaal 2,6°C.

De vloeiende lijn laat zich redelijk goed beschrijven door een sinusoïde.
Een algemene formule voor een sinusoïde is bijvoorbeeld:

$T = a + b\sin(c(t - d))$

De onderzoeker beschreef de vloeiende lijn met de volgende formule:

$T = 9{,}85 + 7{,}25\sin(0{,}0172(t - 106))$

Hierin is T de gemiddelde dagtemperatuur in °C, t de tijd in dagen en $t = 0$ op 1 januari.

5 Laat zien hoe de waarden van a, b, c en d uit de figuur volgen.

6 Bereken met behulp van de formule voor welke waarde van t de gemiddelde dagtemperatuur het hoogst is.

Een onderzoeker vraagt zich af: als de aarde opwarmt, hoeveel aangename zomerse dagen levert dat extra op in Ukkel?

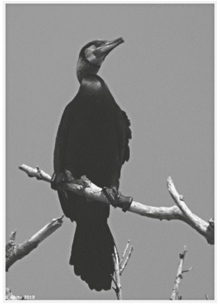
Een dag met een gemiddelde dagtemperatuur van ten minste 16°C is een aangename zomerse dag. Dat komt volgens het model beschreven met de formule

$T = 9{,}85 + 7{,}25\sin(0{,}0172(t - 106))$

jaarlijks 65 keer voor. Als door de opwarming van de aarde de gemiddelde dagtemperatuur in Ukkel elke dag twee graden hoger is, moet het model worden aangepast en verandert de formule.

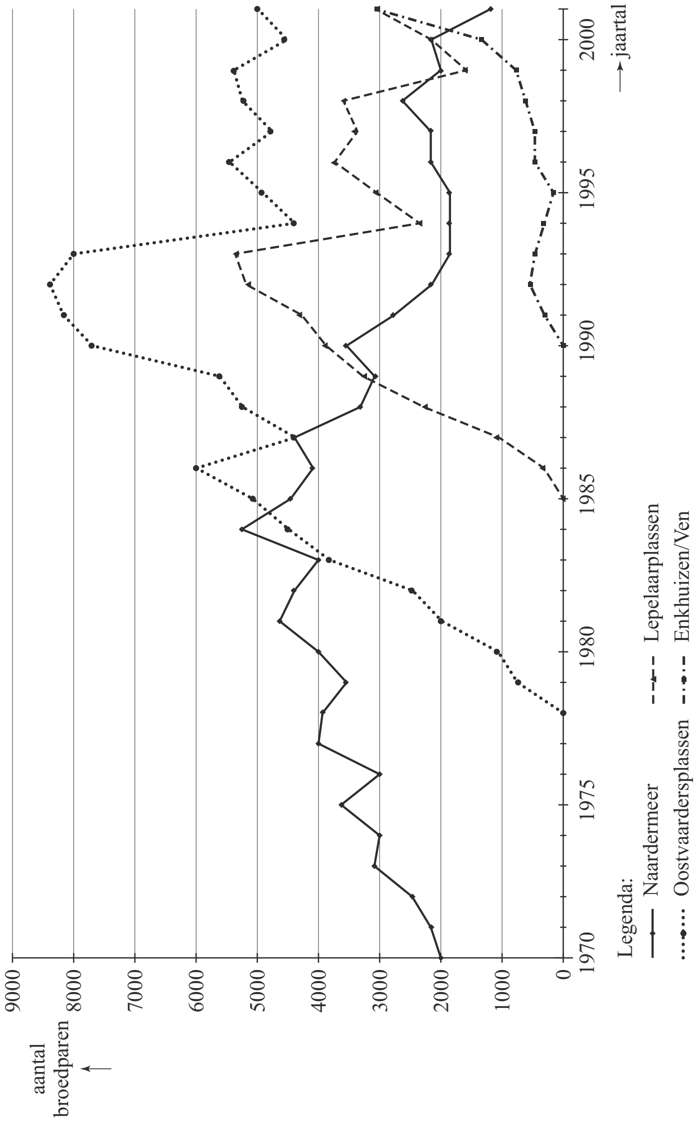
7 Maak een nieuwe formule en bereken daarmee hoeveel extra aangename zomerse dagen deze twee graden temperatuurstijging zou opleveren.

Aalscholvers



Op de foto hiernaast zie je een aalscholver. Aalscholvers leven in de buurt van meren en voeden zich met vis.
In figuur 1 zie je de aantallen broedparen van vier verschillende kolonies (groepen) aalscholvers.

figuur 1



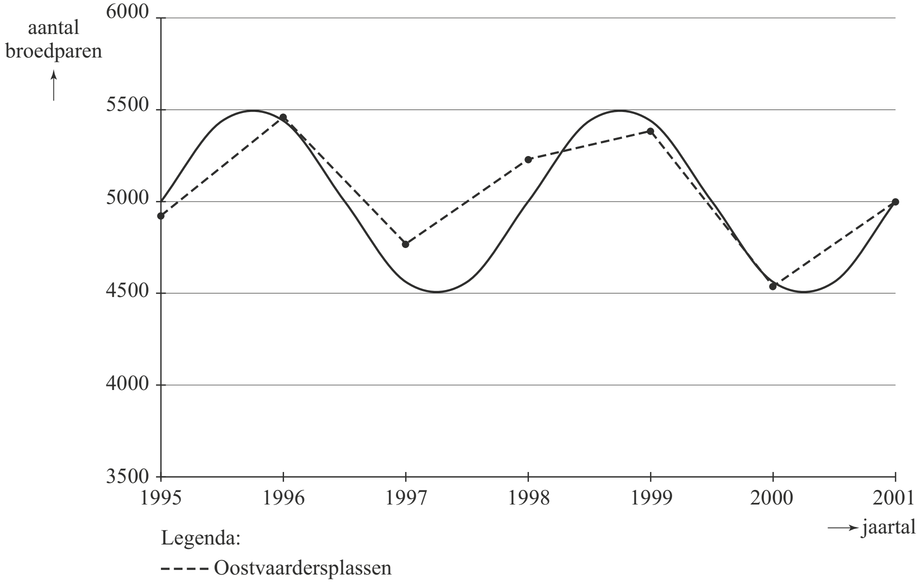
In 1978 verschenen de eerste aalscholvers bij de Oostvaardersplassen en in 1985 bij de Lepelaarplassen. Beide kolonies vertoonden in het begin een periode van snelle groei, namelijk de periode 1978-1992 voor de Oostvaardersplassenkolonie en de periode 1985-1993 voor de Lepelaarplassenkolonie.

We vergelijken de gemiddelde groei per jaar in de periode 1978-1992 voor de Oostvaardersplassenkolonie met de gemiddelde groei per jaar in de periode 1985-1993 voor de Lepelaarplassenkolonie. De terugval in 1987 doet vermoeden dat de gemiddelde groei per jaar van de aantallen in de Oostvaardersplassenkolonie kleiner zal zijn dan die in de Lepelaarplassenkolonie.

8 Onderzoek met een berekening of dit inderdaad zo is en geef aan hoe je dit zonder berekening ook in de grafiek kunt zien. Gebruik daarbij figuur 1.

Na een sterke terugval in 1994 vertonen de aantallen in de Oostvaardersplassen-kolonie een periodieke schommeling. Zie figuur 2. Zo'n schommeling kan bijvoorbeeld ontstaan doordat een slecht broedseizoen gevolgen heeft voor een aantal jaren later, als deze vogels volwassen worden en zelf jongen krijgen.

figuur 2

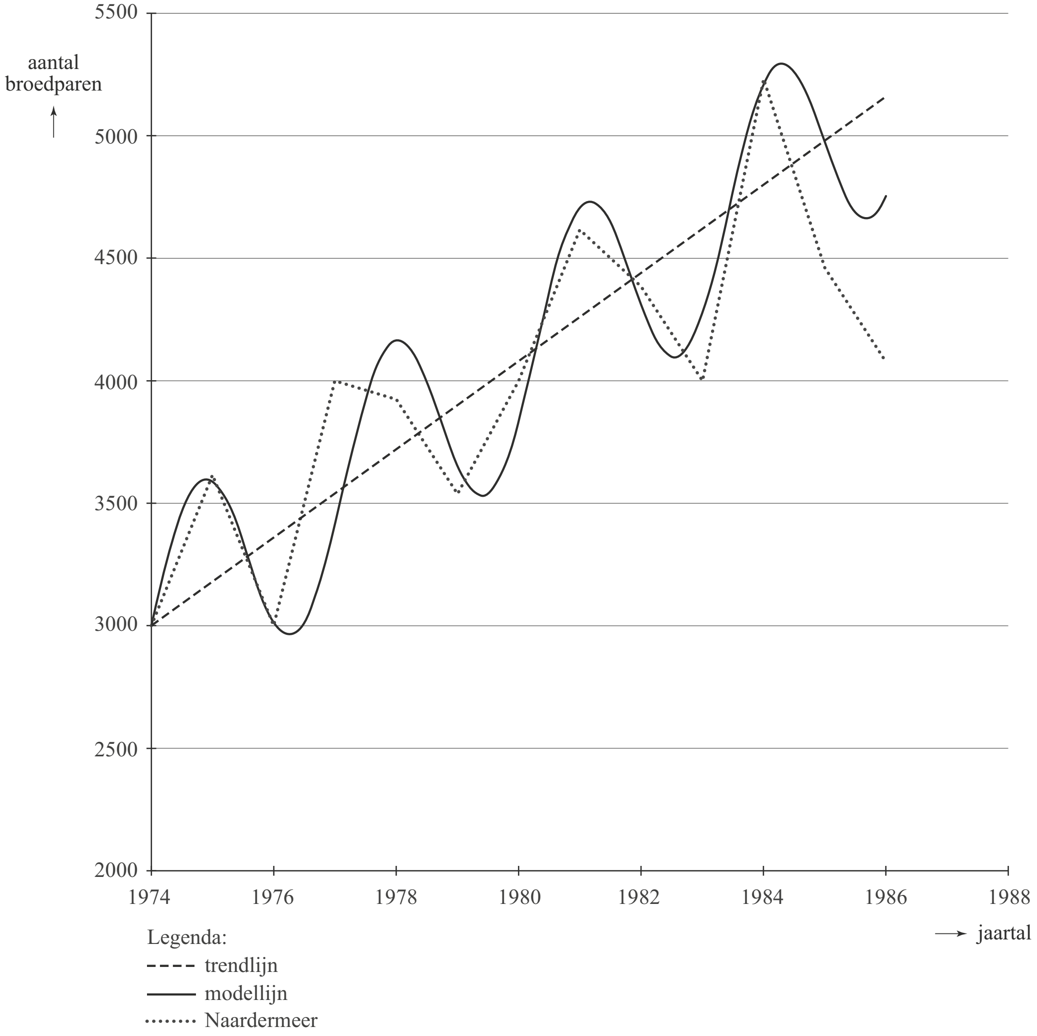


Men kan de aantallen broedparen van de Oostvaardersplassenkolonie van 1995 tot en met 2001 benaderen met een sinusfunctie. In figuur 2 zie je de grafiek van deze sinusfunctie.

9 Stel een formule op die de sinusgrafiek van figuur 2 zo goed mogelijk benadert. Neem t in jaren met $t = 0$ in 1995. Licht je antwoord toe.

De kolonie bij het Naardermeer bestaat al langer. In de periode van 1974 tot en met 1985 is hier ook een schommeling van de aantallen te zien. Bovendien nemen de aantallen langzaam toe. In figuur 3 is de ontwikkeling van de aantallen benaderd met een modellijn.

figuur 3



Bij de modellijn kan men een formule opstellen van de vorm:

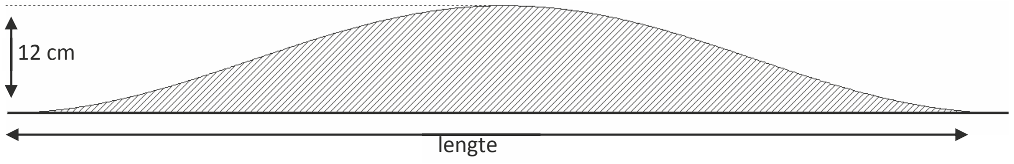
$N = p + q \cdot t + a \cdot \sin(b \cdot t)$

Hierin is t in jaren met $t = 0$ in 1974.
Het gedeelte $p + q \cdot t$ betekent dat de evenwichtsstand niet constant is, maar stijgt volgens een rechte lijn: de trendlijn. De waarden van p, q, a en b in deze formule kan men met behulp van figuur 3 berekenen.

10 Bereken de waarden van p, q, a en b.

Verkeersdrempels

In België zijn vorm en afmetingen van verkeersdrempels sinds 1983 wettelijk vastgelegd. Het zijaanzicht van een verkeersdrempel heeft een sinusvorm. Zie de onderstaande figuur.



Voor de verkeersdrempel van de figuur hierboven, die hoort bij een maximumsnelheid van 30 km/uur, is de volgende formule opgesteld:

$h = 0{,}06 + 0{,}06\sin(\frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{2}\pi)$

Hierin is h de hoogte en x de horizontale afstand vanaf het (linker-)begin van de drempel, beide in meter.

11 Bereken hoeveel meter de lengte van deze drempel is.

Met de formule kun je berekenen over welke lengte deze drempel meer dan 10 cm hoog is.

12 Bereken deze lengte in cm nauwkeurig.

De helling van de drempel is niet overal even groot.

13 Hoeveel meter van het begin van de drempel ligt het eerste punt waar de drempel maximale helling heeft?

Een verkeersdrempel die hoort bij een maximumsnelheid van 60 km/uur is 12 meter lang en 14 cm hoog. Daarbij hoort een formule van de vorm:

$h = a + b\sin(c(x - d))$

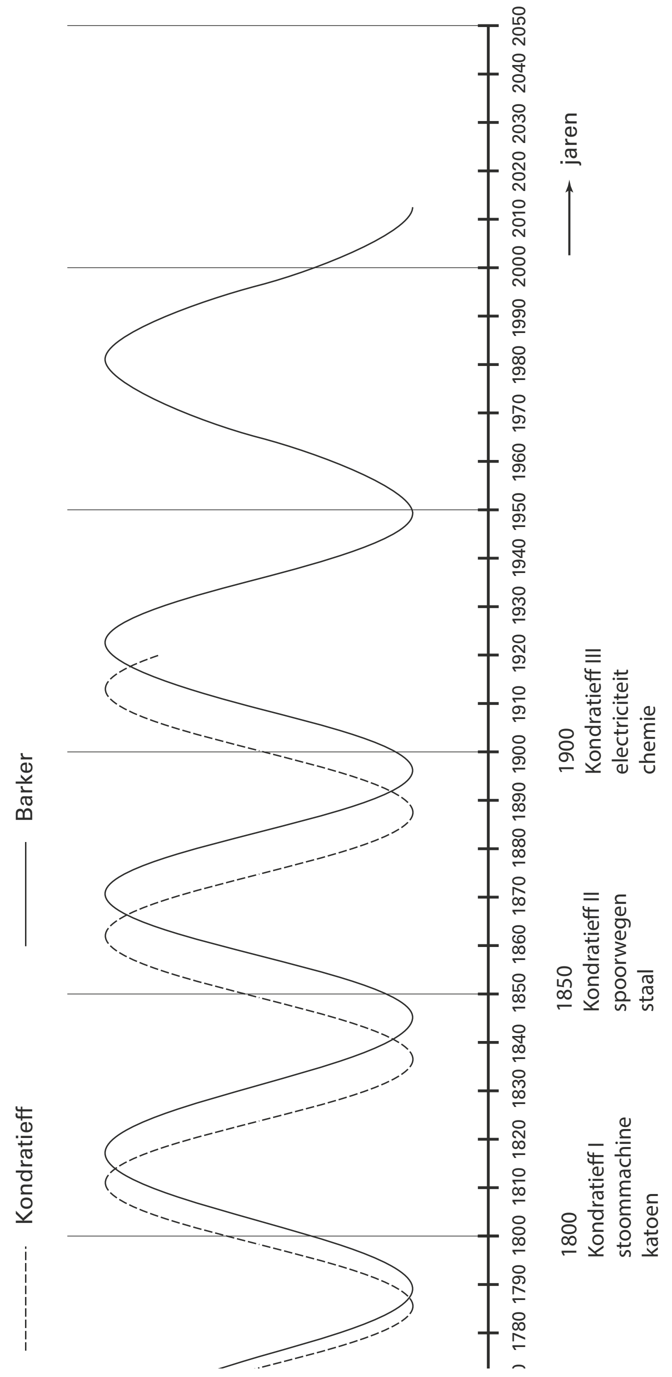
Ook hier is h de hoogte en x de horizontale afstand vanaf het (linker-)begin van de drempel, beide in meter.

14 Hoe groot zijn a, b, c en d?

Economische cycli

Golfbewegingen volgens Kondratieff en Barker

In de economie komen vaak golfbewegingen voor: het gaat afwisselend beter en slechter met de economie. Economen proberen deze golfbewegingen te analyseren, onder andere om een volgende economische crisis te kunnen voorspellen.



In november 2010 stond hierover een artikel in dagblad Trouw. In de figuur, gebaseerd op dit artikel, zijn twee verschillende golfbewegingen te zien.

De Russische econoom Kondratieff presenteerde rond 1920 de theorie dat er in de (kapitalistische) wereldeconomie golven of cycli voorkomen met een periode tussen de 50 en 60 jaar: na grote technische vernieuwingen leeft de economie steeds op, om een aantal jaren later weer in een crisis of slechte tijd te belanden.
In de figuur is onder andere de golfbeweging volgens Kondratieff getekend tot 1920. Als je deze golfbeweging met dezelfde vaste periode ook na 1920 voortzet, wordt de crisis van 2009 hiermee niet goed voorspeld.

15 Laat met een redenering gebaseerd op de figuur zien dat 2009 volgens Kondratieff niet in een periode van economische neergang zit.

De Amerikaanse beursanalist Barker gaat uit van een iets andere golfbeweging. Ook de golfbeweging volgens Barker is in de figuur getekend. Vanaf het dieptepunt in 1949 heeft de golfbeweging volgens Barker een periode die constant is.

In de figuur is te zien dat de golfbewegingen volgens Kondratieff en Barker steeds meer van elkaar gaan verschillen. In bepaalde perioden laten de beide grafieken zelfs een tegengestelde beweging van de economie zien: de grafiek volgens Barker stijgt, terwijl die van Kondratieff daalt of andersom.

16 Onderzoek met behulp van de figuur in welke perioden tussen 1950 en 2050 de grafieken van Kondratieff en Barker een tegengestelde beweging van de economie laten zien.

De golfbeweging volgens Barker kan vanaf het dieptepunt in 1949 benaderd worden met de formule:

$B = \sin\left(\frac{2\pi}{63}(t - 1965)\right)$ met t het jaartal

Omdat we hier alleen het stijgen en dalen van de golfbeweging bekijken, doet het er niet toe welke evenwichtsstand en welke amplitude we kiezen. In deze formule is gekozen voor evenwichtsstand 0 en amplitude 1.
Voor de golfbeweging volgens Kondratieff kan een soortgelijke formule opgesteld worden.

17 Stel een formule voor de golfbeweging volgens Kondratieff op.

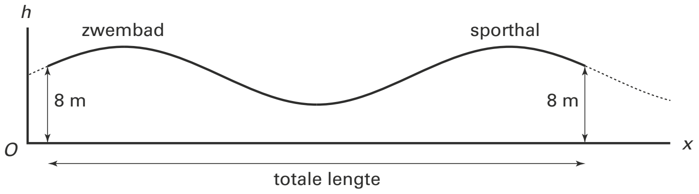
Golvend dak

Op de foto zie je een zwembad met sporthal, samen onder één golvend dak. Het golvende dak bereikt boven het zwembad dezelfde hoogte als boven de sporthal. In de figuur is een schematisch vooraanzicht getekend.
In dit vooraanzicht heeft de rand van het dak de vorm van een sinusoïde met als formule

$h = 3 \cdot \sin(0{,}1 \cdot x) + 7$

De hoogte h en de lengte x zijn allebei in meter. De lengte x wordt van links naar rechts over de grond gemeten langs de voorkant van het gebouw, vanaf een punt O dat links van de linkerkant van de voorgevel van het gebouw ligt.

Aan beide uiteinden van het gebouw is het dak 8 meter hoog. Zie de figuur.



18 Bereken de minimale en de maximale hoogte van het dak.

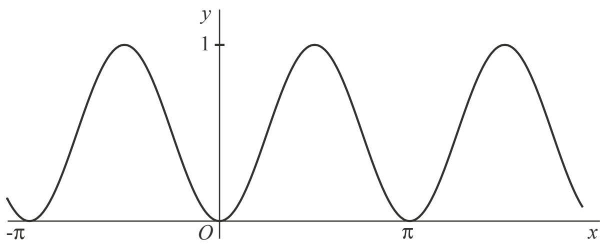
19 Bereken de totale lengte van het gebouw in gehele meters nauwkeurig.

Zoals je aan de grafiek in de figuur kunt zien, is de helling van het vooraanzicht niet overal hetzelfde.

20 Op hoeveel meter van de linkerkant van de voorgevel van het gebouw (zie de figuur) is de helling het grootst? Licht je antwoord toe.

Sinusoïde

Van een sinusoïde zijn de punten (0, 0) en ($\frac{1}{2}\pi$, 1) twee opeenvolgende toppen.
Zie de figuur.



Deze sinusoïde kan worden beschreven door een formule van de vorm
$y = a + b \cdot \sin(c(x - d))$.

21 Bepaal mogelijke waarden van *a*, *b*, *c* en *d*.

Hints bij hoofdstuk 4b

1 De evenwichtsstand ligt precies tussen minimum en maximum en r is $\frac{2\pi}{periode}$.

2 Lees de maximale en minimale fotosynthetische activiteit af in de figuur. Hieruit volgen evenwichtsstand en amplitude. De periode volgt uit de tekst in de opgave. Hiermee kan *c* berekend worden.

3 Met de rekenmachine zoeken naar tijdstippen waarop de lichtintensiteit gelijk is aan 3.

4 Zoek met behulp van een liniaal een punt waar de grafiek overgaat van toenemende daling naar afnemende daling. Gebruik de verticale schaalverdeling aan de rechterzijde.

5 Evenwichtsstand, amplitude en periode volgen direct uit de gegevens. Controleer $d = 106$ met behulp van de figuur.

6 *t* moet een geheel getal zijn. Zoek het maximum in een tabel op de rekenmachine. In de figuur kun je zien dat je het maximum moet zoeken in de buurt van $t = 200$.

7 De grafiek gaat 2 graden omhoog, dus alleen de evenwichtsstand verandert.

8 Lees in figuur 1 de aantallen broedparen aan het einde van de genoemde perioden af en bereken de gemiddelde groei.
Trek in de figuur een verbindingslijn tussen het eerste en het laatste punt van de genoemde perioden en vergelijk de steilte van deze lijnen.

9 Evenwichtsstand en amplitude kunnen direct worden afgelezen. De grafiek toont twee complete golven. Daaruit volgt de periode.

10 Lees het startpunt en nog een ander punt van de trendlijn af om startwaarde *p* en helling *q* te bepalen. Lees zo goed mogelijk een snijpunt van de modellijn met de trendlijn af om de periode te bepalen. De amplitude is de verticale afstand tussen een top van de modellijn en de trendlijn.

11 De lengte van de verkeersdrempel is gelijk aan een periode van de grafiek van *h*.

12 Oplossen met de rekenmachine.

13 Een sinusoïde is het steilst bij het passeren van de evenwichtsstand.

14 *a* is evenwichtsstand, *b* de amplitude, *c* heeft iets met de periode te maken en *d* bepaalt de horizontale verschuiving.

15 Lees in figuur zo nauwkeurig mogelijk de jaartallen bij de maxima (of minima) van de grafiek van Kondratieff af. Hieruit volgt de periode. Doorrekenen naar de 21e eeuw.

16 Schets het ontbrekende deel van de grafieken van Kondratieff en Barker tot 2050. De maxima van Kondratieff volgen uit de eerder bepaalde periode. De grafiek van Barker is minder regelmatig dus het vervolg kan niet heel nauwkeurig geschetst worden. Voor de vraag is alleen de positie van de toppen van belang.

17 De gezochte formule heeft de vorm $K = \sin(c(t - d))$ waarin *c* wordt bepaald door de periode en *d* door het jaartal waar de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.

18 Lees uit de formule amplitude en evenwichtsstand af.

19 Bereken met de rekenmachine de waarden van *x* waarvoor $h = 8$.

20 De helling is het grootst als de grafiek door de evenwichtsstand gaat.

21 Gebruik de coördinaten van de toppen om evenwichtsstand en amplitude te berekenen. De periode kan uit de figuur worden afgelezen of uit de toppen worden berekend.

Uitwerkingen bij hoofdstuk 4b

Fietssnelheid

1 De evenwichtsstand p ligt bij $\frac{maximum + minimum}{2} = \frac{49{,}82 + 49{,}96}{2} = 49{,}89$ km/uur dus $p = 49{,}89$.
De amplitude q is de maximale uitwijking ten opzichte van de evenwichtsstand dus $q = 49{,}96 - 49{,}89 = 0{,}07$

De periode van de sinusoïde is π dus $periode = \frac{2\pi}{r} = \pi \Rightarrow r = 2$

De sinusoïde gaat stijgend door de evenwichtsstand na 7 hokjes, gerekend vanaf $\alpha = 0$.

7 hokjes komt overeen met $\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{2}\pi$ dus $s = \frac{7}{16}\pi$.

Algen

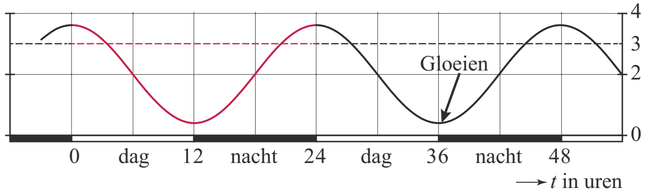
2 Lees af in de figuur: de maximale fotosynthetische activiteit is 57 en de minimale is 13.
De evenwichtsstand $a = \frac{maximum + minimum}{2} = \frac{57 + 13}{2} = 35$.

De amplitude $b = \frac{maximum - minimum}{2} = \frac{57 - 13}{2} = 22$.

De periode is 24 uur dus $c = \frac{2\pi}{periode} = \frac{2\pi}{24} = \frac{1}{12}\pi \approx 0{,}26$.

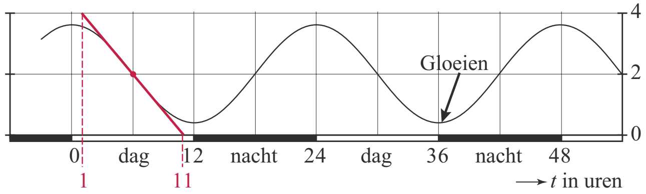
De formule voor de fotosynthese is $F = 35 + 22\sin\left(\frac{1}{12}\pi(t-3)\right)$ of
$F = 35 + 22\sin(0{,}26(t-3))$

3 Voer in de rekenmachine in $y_1 = 2{,}0 + 1{,}6\sin\left(\frac{1}{12}\pi(t-18)\right)$ en $y_2 = 3$.



In de eerste 24 uur geeft de optie *intersect/snijpunt* $x = 3{,}421...$ en $x = 20{,}578...$
De grafiek is groter dan 3 voor $0 \leq x < 3{,}421...$ en $20{,}578... < x \leq 24$.
De lichtintensiteit is in een periode van 24 uur groter dan 3 eenheden gedurende $(3{,}421... - 0) + (24 - 20{,}578...) = 6{,}842...$ uren $= 6{,}842... \cdot 60 = 410{,}54... \approx 411$ minuten.
Naar beneden afronden tot 410 minuten is ook verdedigbaar.

4 Zoek met behulp van een liniaal een punt waar de grafiek overgaat van toenemende daling naar afnemende daling. Zo'n punt is bijvoorbeeld (6, 2).



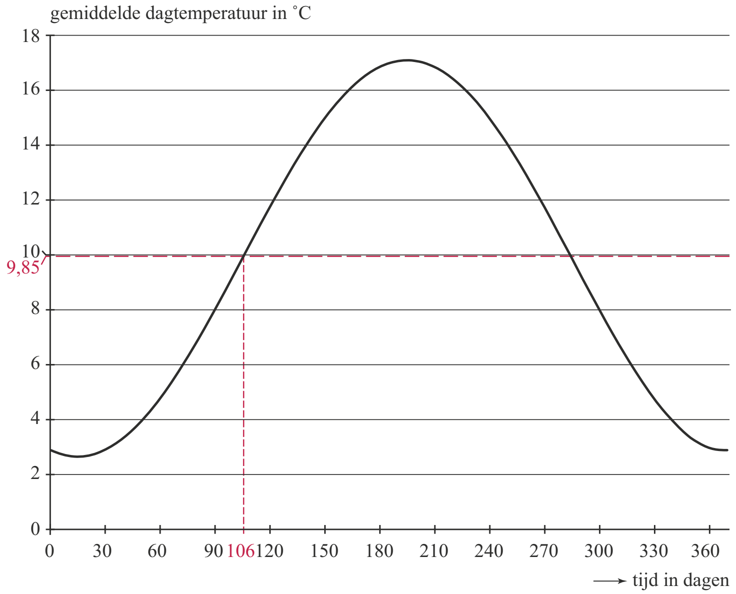
De bijbehorende raaklijn snijdt de t-as bij $t = 11$ en de horizontale lijn met lichtintensiteit 4 bij $t = 1$. In 10 uur daalt deze raaklijn 4 eenheden dus de maximale snelheid waarmee de lichtintensiteit afneemt is 0,4 eenheden per uur.

Zomer in Ukkel

5 De gemiddelde dagtemperatuur is maximaal 17,1 °C en minimaal 2,6 °C.
De evenwichtsstand $a = \frac{maximum + minimum}{2} = \frac{17{,}1 + 2{,}6}{2} = 9{,}85$ °C.

De amplitude $b = \frac{maximum - minimum}{2} = \frac{17{,}1 - 2{,}6}{2} = 7{,}25$ °C.

De periode is 365 dagen dus $c = \frac{2\pi}{periode} = \frac{2\pi}{365} \approx 0{,}0172$.



De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand 9,85 op (ongeveer) dag 106.
Dus $d = 106$.

6 Voer in de rekenmachine in $y_1 = 9{,}85 + 7{,}25\sin(0{,}0172(x - 106))$.
De rekenmachine geeft de volgende tabel:

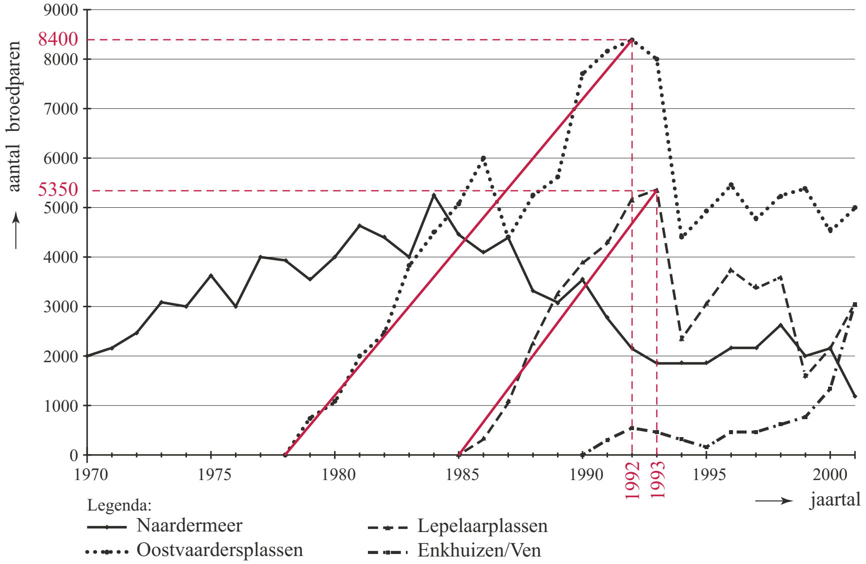
t	T
196	17,098
197	17,1
198	17,097

Voor $t = 197$, dus op dag 197, is volgens de formule de gemiddelde dagtemperatuur het grootst.
De optie maximum geeft $t \approx 197{,}3$ maar t is het nummer van een dag dus t moet worden afgerond op een geheel getal.

7 Als de gemiddelde dagtemperatuur elke dag 2 graden hoger is, gaat de evenwichtsstand met 2 omhoog, dus $a = 11{,}85$.
Amplitude, periode en de t-waarde van het beginpunt veranderen niet.
De formule wordt dan $T = 11{,}85 + 7{,}25\sin(0{,}0172(t - 106))$.
Voer in de rekenmachine in $y_1 = 11{,}85 + 7{,}25\sin(0{,}0172(x - 106))$ en $y_2 = 16$.
De optie *intersect/snijpunt* geeft $x \approx 141{,}4$ en $x \approx 253{,}2$.
Op dag $t = 142$ is het voor het eerst ten minste 16 graden, en op dag $t = 253$ voor het laatst. Dat is op 253 – 141 = 112 dagen.
Een temperatuurstijging van 2 graden zal 112 – 65 = 47 extra aangename zomerse dagen opleveren.
Het is ook mogelijk het aantal dagen met een gemiddelde dagtemperatuur van ten minste 16 graden te tellen in een tabel van $T = 11{,}85 + 7{,}25\sin(0{,}0172(t - 106))$.

Aalscholvers

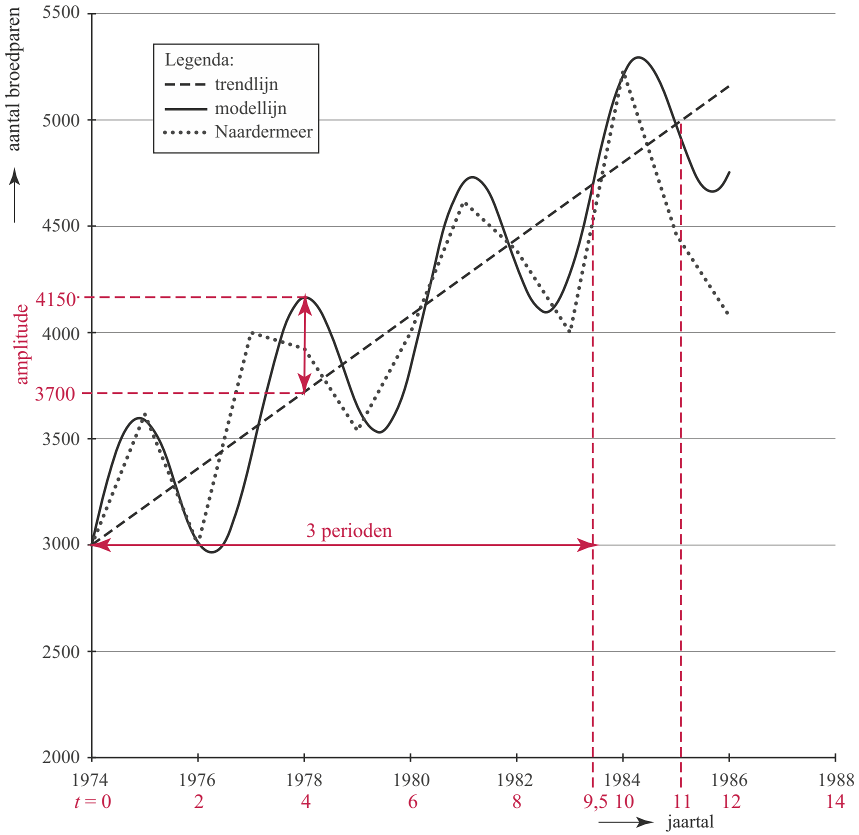
8 Aflezen in figuur 1.
In de 14 jaar van 1978 tot 1992 groeit het aantal broedparen in de Oostvaardersplassen van 0 naar 8400. Dat is een groei van gemiddeld $\frac{8400}{14} = 600$ broedparen per jaar.
In de 8 jaar van 1985 tot 1993 groeit het aantal broedparen in de Lepelaarsplassen van 0 naar 5350. Dat is een groei van gemiddeld $\frac{5350}{8} \approx 669$ broedparen per jaar.
De gemiddelde groei in de Oostvaardersplassen is inderdaad kleiner.



Verbind in de grafiek de punten (1978, 0) en (1992, 8400) met een lijn. Doe dat ook met de punten (1985, 0) en (1993, 5350). De lijn die bij de Oostvaardersplassen hoort is minder steil dan die van de Lepelaarsplassen, dus in de Oostvaardersplassen is de gemiddelde groei kleiner.

9 Een formule voor de aantallen broedparen heeft de vorm $A(t) = a + b\sin(c(t - d))$.
Aflezen in figuur 2.
Evenwichtsstand $a = 5000$, amplitude $b = 500$.
Van 1995 tot 2001 zijn twee complete golven te zien, dus de periode is 3 jaar.
Uit de periode volgt: $c = \frac{2\pi}{periode} = \frac{2\pi}{3} \approx 2{,}09$.
De grafiek start voor $t = 0$ (1995) stijgend vanuit de evenwichtsstand dus $d = 0$.
De formule wordt: $A(t) = 5000 + 500\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$ of $A(t) = 5000 + 500\sin(2{,}09t)$.

10 De trendlijn start op $t = 0$ (1974) met 3000 broedparen en bereikt het niveau 5000 broedparen ongeveer op $t = 11$ (1985).



Het startgetal van de trendlijn is $p = 3000$.
De helling van de trendlijn is $q = \frac{5000 - 3000}{11} \approx 182$.
De modellijn snijdt de trendlijn na drie perioden voor $t \approx 9{,}5$ (tussen 1983 en 1984).
De periode is dan $\frac{9{,}5}{3} = 3{,}166...$ dus $b = \frac{2\pi}{periode} = \frac{2\pi}{3{,}166...} \approx 1{,}98$.
De amplitude is de verticale afstand tussen een top van de modellijn en de trendlijn.
Aflezen in de figuur: $a = 4150 - 3700 = 450$.

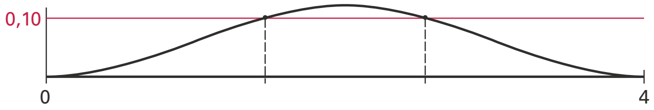
Verkeersdrempels

11 De lengte van de verkeersdrempel is gelijk aan een periode van de grafiek van *h*.

Periode = $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 4$ dus de lengte van deze drempel is 4 meter.

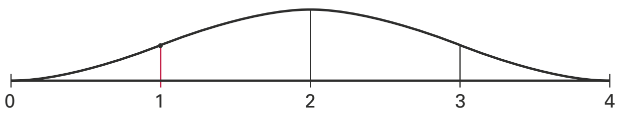
12 Uitzoeken na hoeveel meter de hoogte van de drempel 0,10 meter (= 10 cm) is.

Voer in de rekenmachine in $y_1 = 0{,}06 + 0{,}06\sin(\frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{2}\pi)$ en $y_2 = 0{,}10$.



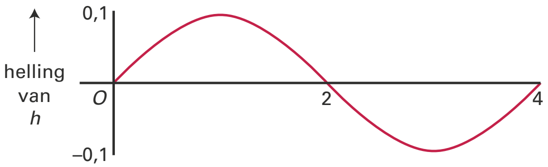
De optie *intersect* geeft $x = 1{,}4645...$ en $x = 2{,}5354...$
Het verschil is 1,0708... dus over een lengte van 1,07 meter (of 107 cm) is de drempel meer dan 10 cm hoog.

13 De verkeersdrempel begint voor $x = 0$ op het laagste punt en bereikt een halve periode later, dus voor $x = 2$, het hoogste punt. Precies hiertussen is de helling maximaal, dus 1 meter vanaf het begin.



andere manier

Voer in de rekenmachine in $y_1 = 0{,}06 + 0{,}06\sin(\frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{2}\pi)$ en $y_2 = \text{nDeriv}(y_1, x, x)$.



In de grafiek van y_2 de plaats van het maximum bepalen met de optie *maximum.*
Er is een maximum voor $x = 1$ dus 1 meter vanaf het begin heeft de drempel een maximale helling.
NB: de grafiek hierboven lijkt een sinusoïde maar het is nog niet zeker of dat ook zo is. Je mag dus niet alleen op grond van de grafiek zeggen dat het maximum bij x = 1 ligt.

derde manier

$h = 0{,}06 + 0{,}06\sin(\frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{2}\pi) \Leftrightarrow h = 0{,}06 + 0{,}06\sin(\frac{1}{2}\pi(x-1))$. Aan de laatste formule kun je zien dat de grafiek 1 eenheid naar rechts is geschoven, dus dat de grafiek voor $x = 1$ stijgend door de evenwichtsstand gaat. Na 1 meter heeft deze drempel maximale helling.

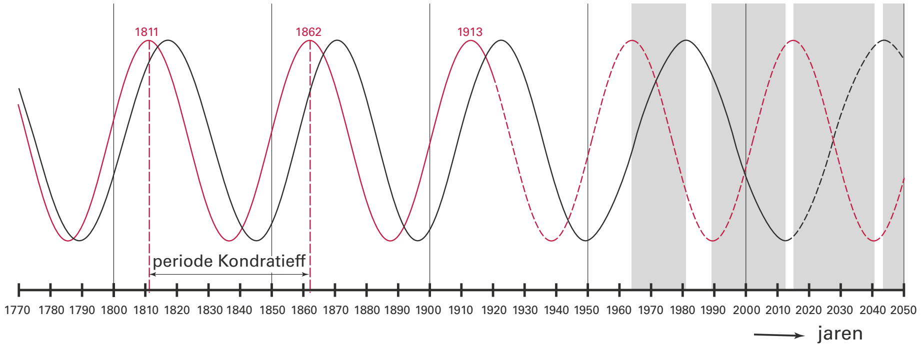
14 De verkeerdrempel is 12 meter lang, dus de periode is 12 $\Rightarrow c = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$.
h is minimaal 0 en maximaal 14 cm dus de evenwichtsstand is $a = 0{,}07$ meter.
De amplitude *b* is ook 0,07 meter.
Na een kwart periode gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand, dus als $x = 3$.
Omdat er in de formule een minteken voor *d* staat, geldt $d = 3$.

Samengevat: $a = 0{,}07$; $b = 0{,}07$; $c = \frac{1}{6}\pi$ en $d = 3$.

Economische cycli

15 Aflezen in de figuur.
De grafiek van Kondratieff bereikt maxima in 1811, 1862 en 1913 dus de periode is 51 jaar.
Twee periodes na 1913, dus in 2015 is er weer een maximum. Het jaar 2009 ligt kort voor dat maximum dus dan is er een economische opgang.

16 De grafieken van Kondratieff en Barker moeten worden voortgezet tot 2050.
Uit de vorige vraag volgt dat de grafiek van Kondratieff maxima zal hebben in 1964 en 2015. De minima liggen hier precies tussen. De grafiek van Barker is minder regelmatig. Een maximum zal rond 2044 vallen.
De perioden waarin de grafieken van Kondratieff en Barker een tegengestelde beweging van de economie laten zien zijn grijs gemaakt.



Het betreft de perioden 1964 – 1981, 1990 – 2012, 2015 – 2040 en 2044 – 2050.
Door het aflezen en het schetsen van de grafieken zullen de gevonden perioden niet tot op het jaar nauwkeurig zijn.

17 De amplitude wordt vastgesteld op 1 en de evenwichtsstand op 0, dus de gezochte formule heeft de vorm $K = \sin(c(t-d))$.
De grafiek van Kondratieff bereikt een maximum in 1913 en de periode is 51 jaar.

$c = \dfrac{2\pi}{\textit{periode}} = \dfrac{2\pi}{51}$

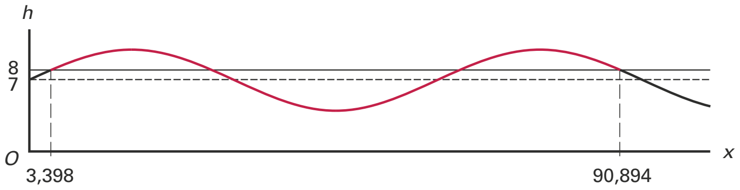
Het duurt na een maximum driekwart periode voordat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat. Dat zou in dit geval dus in $1913 + 0{,}75 \cdot 51 \approx 1951$ zijn.
Hieruit volgt $d = 1951$.

Een mogelijke formule voor de golfbeweging van Kondratieff is: $K = \sin\left(\frac{2\pi}{51}(t-1951)\right)$

Golvend dak

18 In de formule $h = 3 \cdot \sin(0{,}1 \cdot x) + 7$ is 3 de amplitude en 7 de evenwichtsstand, dus het dak is minimaal 4 meter hoog en maximaal 10 meter.

19 Het punt *O* vanwaar *x* wordt gemeten ligt links van de linkerkant van de voorgevel van het gebouw. Voer in de rekenmachine in $y_1 = 3 \cdot \sin(0{,}1 \cdot x) + 7$ en $y_2 = 8$.



De optie *intersect/snijpunt* geeft $x = 3{,}398...$ en $x = 90{,}849...$
De totale lengte van het gebouw is 90,849... – 3,398... = 87,451... dus afgerond 87 meter.

20 De helling is het grootst als de grafiek van *h* stijgend door de evenwichtsstand gaat.

De periode van de grafiek van *h* is $\frac{2\pi}{0{,}1} = 20\pi$ meter.

De grafiek van *h* start voor $x = 0$ op de evenwichtsstand, maar dit punt ligt niet op het dak van de sporthal. Een periode later gaat de grafiek van *h* opnieuw stijgend door de evenwichtsstand, dat is dus voor $x = 20\pi$. Gerekend vanaf de linkerkant van de voorgevel van het gebouw is dat na $20\pi - 3{,}398... \approx 59{,}4$ meter.
Op $10\pi - 3{,}398... \approx 28{,}0$ meter gerekend vanaf de linkerkant van de voorgevel is het dak even steil, maar dalend.

Sinusoïde

21 (0, 0) is een laagste punt en $(\frac{1}{2}\pi, 1)$ is een hoogste punt dus de evenwichtsstand is $y = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

De amplitude is dan ook $\frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$.

De periode is $\pi \Rightarrow c = \frac{2\pi}{\textit{periode}} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

Voor $x = \frac{1}{4}\pi$, precies tussen de twee opeenvolgende toppen, gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand, dus $d = \frac{1}{4}\pi$.

5 Rijen

WK 2010

Aan het wereldkampioenschap voetbal 2010 in Zuid-Afrika deden 32 landen mee. Ze speelden eerst een groepsfase. Hierin speelden de landen in 8 poules van 4 teams. In zo'n poule speelt ieder team één wedstrijd tegen elk ander team. De twee hoogst eindigende teams per poule gingen door naar de knock-outfase. Deze overgebleven teams speelden allemaal één wedstrijd tegen een ander team en de verliezer moest naar huis. De winnaars gingen door en speelden weer één wedstrijd tot er uiteindelijk nog twee teams over waren. Die speelden de finale. Er was ook nog een wedstrijd om de derde plaats, de troostfinale.

In eerdere edities van het WK waren er minder deelnemende teams. Zo waren er in 1974 in West-Duitsland maar 16 teams. Die speelden volgens hetzelfde schema: eerst in poules van 4 en de twee hoogst eindigende teams naar de knock-outfase.

Er werden in 1974 natuurlijk veel minder wedstrijden gespeeld dan in 2010.

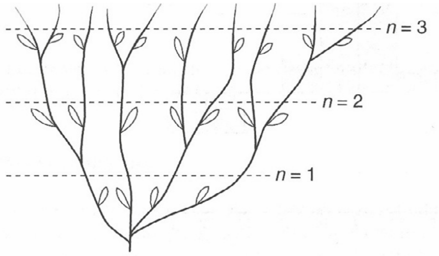
1 Ga met een berekening na of de verdubbeling van het aantal deelnemende teams ook geleid heeft tot een verdubbeling van het totaal aantal wedstrijden.

Alle WK's kenden een groepsfase met poules van 4 teams. Dat hoeft natuurlijk niet. Er zouden ook meer teams in een poule kunnen zitten. Dat leidt dan wel tot een groter aantal poulewedstrijden.
$W(n)$ is het aantal wedstrijden in een poule met *n* teams. Er geldt nu dat
$W(n + 1) = W(n) + n$ waarbij $W(n + 1)$ het aantal wedstrijden in een poule met $n + 1$ teams is.

2 Toon aan dat dit geldt.

Trychans

De Trychans Artificialis is een zeldzame plantensoort die alleen voorkomt op de Fantasy Islands.
Bijzonder is de manier waarop het aantal takken elk jaar toeneemt. In de loop van het eerste jaar ontstaan er vier takken en op elke tak vormt zich één blad. Een jaar later, dus in de loop van het tweede jaar, komen er drie takken bij en vormt zich op elk van de zeven takken weer één blad. Dit proces herhaalt zich elk jaar: er komen drie takken bij en op alle takken ontstaat een nieuw blad. Zie de figuur.



Wanneer we het aantal takken na het *n*-de jaar aangeven met T_n dan kunnen we hiervoor een formule opstellen:

$T_n = 1 + 3n$

3 Na hoeveel jaren is het aantal takken gelijk aan 52?

4 Schrijf een recursieve formule op voor het aantal takken.

5 Na hoeveel jaren is het totale aantal bladeren gelijk aan 375? Licht je antwoord toe.

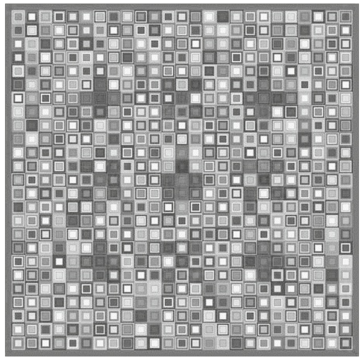
Er zijn verschillende soorten van de Trychans Artificialis. Maar ze hebben allemaal de eigenschap dat er elk jaar drie takken bij komen. Bovendien geldt voor elke soort dat er zich steeds per tak één blad vormt. Ze verschillen dus alleen van elkaar in het aantal takken dat er in het eerste jaar wordt gevormd. Dat betekent dat voor alle soorten Trychans Artificialis het aantal takken T_n kan worden beschreven met een formule van de vorm $T_n = a + 3n$

6 Laat zien dat er geen enkele soort Trychans Artificialis is waarvan het totale aantal bladeren na 8 jaar gelijk is aan 160.

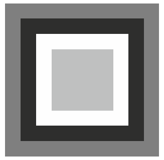
Vierkanten

Op de foto hieronder zie je een kunstwerk van Margaret Kepner, dat opgebouwd is uit 25 bij 25 vierkanten. Elk van deze vierkanten bestaat uit een klein vierkant en drie vierkante 'randen' eromheen. Elk van deze vier onderdelen kan wit, lichtgrijs, middelgrijs, donkergrijs of zwart zijn. In figuur 1 en figuur 2 zie je hier voorbeelden van. De vier onderdelen van het vierkant van figuur 1 zijn van buiten naar binnen respectievelijk donkergrijs, zwart, wit en lichtgrijs. Eenzelfde kleur kan ook meer keren voorkomen: zie figuur 2. En verder voor de duidelijkheid: twee onderdelen naast elkaar mogen ook dezelfde kleur hebben.

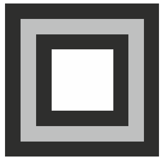
foto



figuur 1



figuur 2



7 Bereken hoeveel verschillende vierkanten er op deze manier gemaakt kunnen worden.

De vierkanten stellen getallen voor. De kleuren corresponderen met cijfers: wit = 0, lichtgrijs = 1, middelgrijs = 2, donkergrijs = 3 en zwart = 4.
Het cijfer van de buitenste rand moet vermenigvuldigd worden met 125, dat van de rand daarbinnen met 25, dat van de binnenste rand met 5 en dat van het binnenste vierkant met 1. In figuur 1 is dus het getal $3 \times 125 + 4 \times 25 + 0 \times 5 + 1 \times 1 = 476$ weergegeven.
Figuur 2 bevat behalve de kleuren zwart en wit ook nog de kleur lichtgrijs.

8 Bereken op dezelfde manier welk getal in figuur 2 afgebeeld is.

In het kunstwerk komen alle getallen van 0 tot en met 624 precies één keer voor. Deze getallen zijn zó gerangschikt dat, als je alle getallen in een rij bij elkaar optelt, dit steeds hetzelfde getal oplevert: het **magische getal**. Ook als je alle getallen in een kolom bij elkaar optelt, komt ditzelfde magische getal er uit. In figuur 3 zie je hiervan een voorbeeld voor een kunstwerk van 3 bij 3 getallen: het magische getal is hier 12.

figuur 3

5	0	7
6	4	2
1	8	3

Het magische getal van het kunstwerk kan men berekenen door alle getallen van 0 tot en met 624 bij elkaar op te tellen en de uitkomst vervolgens te delen door het aantal rijen: elke rij moet immers bij optellen hetzelfde getal opleveren.
Voor een rij getallen zoals in dit kunstwerk geldt de volgende formule:

som = 0,5 · *aantal termen* · (*eerste term* + *laatste term*)

9 Bereken met behulp van de bovenstaande formule het magische getal van het kunstwerk.

In het algemeen geldt voor een kunstwerk van *p* bij *p* getallen waarin elk getal van 0 tot en met $p^2 - 1$ precies één keer voorkomt, de volgende formule voor het magische getal:

magisch getal = $0{,}5 \cdot p \cdot (p^2 - 1)$

Deze formule voor het magische getal is af te leiden door te bedenken dat het magische getal gelijk is aan de som van alle getallen in het kunstwerk gedeeld door het aantal rijen.

10 Toon, zonder getallenvoorbeelden, aan dat de formule voor het magische getal juist is. Gebruik daarbij voor het berekenen van de som van de getallen de formule *som* = 0,5 · *aantal termen* · (*eerste term* + *laatste term*).

Voor een expositie wil een andere kunstenaar een werk maken vergelijkbaar met dat van Margaret Kepner van hierboven. Dit kunstwerk is een stuk kleiner en moet opgebouwd zijn uit *p* bij *p* vierkantjes die verschillende getallen voorstellen.
De kunstenaar wil weten bij welke waarden van *p* het magische getal van zo'n kunstwerk ligt tussen 500 en 1000.

11 Bereken voor welke waarden van *p* dat het geval is.

Woningnood

In een stad woonden op 1 januari 2010 (t = 0) 90 000 mensen. Op datzelfde moment waren er 27 000 woningen beschikbaar.
De bevolking van deze stad groeit ieder jaar met 2%, dus een formule hierbij is:

$B = 90\,000 \cdot 1{,}02^t$

waarin B de omvang van de bevolking is en t het aantal jaren vanaf 1 januari 2010.

Omdat de bevolking groeit wordt er elk jaar een aantal nieuwe woningen gebouwd. Er verdwijnen geen woningen. Neem aan dat er elk jaar 500 nieuwe woningen worden gebouwd.

Er is sprake van woningnood als er gemiddeld meer dan vier mensen in een huis moeten wonen.

12 Laat met een berekening zien dat in 2043 voor het eerst woningnood zal optreden.

13 Bereken hoeveel jaar de woningnood uitgesteld kan worden als er elk jaar 600 in plaats van 500 nieuwe woningen worden gebouwd.

In de praktijk bleek het niet mogelijk om van het begin af aan elk jaar 600 nieuwe woningen te bouwen. Wel bleek het haalbaar om elk jaar 10 nieuwe woningen meer te bouwen dan het jaar ervoor. In 2010 werden 500 nieuwe woningen gebouwd, in 2011 waren het er 510 en in de jaren daarna 520, 530 enzovoort.

14 Bereken hoeveel nieuwe woningen er in de periode 2010 – 2030 worden gebouwd als dit bouwschema wordt aangehouden.

15 In welk jaar zal er bij dit bouwschema voor het eerst woningnood optreden?

Fibonacci

In de wiskunde is de volgende rij getallen erg bekend:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …
Deze rij getallen staat bekend als de rij van Fibonacci (Pisa, 1170-1250).
Elk getal in deze rij is te berekenen door de twee voorgaande getallen op te tellen.
In formulevorm ziet dit er als volgt uit:

$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ met $u_1 = 1$ en $u_2 = 1$

Je kunt dit eenvoudig narekenen bij het begin van de rij:

2 = 1 + 1
3 = 2 + 1
5 = 3 + 2
8 = 5 + 3
enzovoort.

Het is duidelijk dat de getallen in de rij van Fibonacci steeds groter worden.

16 Bereken hoeveel getallen in de rij van Fibonacci een waarde hebben tussen 100 en 500.

De rij van Fibonacci heeft veel bijzondere eigenschappen. Zo heeft de rij die je krijgt door steeds de verhouding van twee opeenvolgende getallen uit de rij van Fibonacci te nemen een grenswaarde G.

Het gaat dan om de rij $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}$ enzovoort. De waarde van deze breuken is op den duur ongeveer gelijk aan 1,618. Vanaf een zeker moment ligt deze verhouding tussen 1,6180 en 1,6181.
Deze grenswaarde G is, met name in de kunst, bekend geworden als de gulden snede.

17 Bereken vanaf welk tweetal opeenvolgende getallen in de rij van Fibonacci de verhouding ligt tussen 1,6180 en 1,6181.

Hints bij hoofdstuk 5

1 Het aantal wedstrijden in een poule van vier teams is gelijk aan het aantal combinaties van 2 uit een totaal van 4.

2 Voeg een team toe en onderzoek hoeveel extra wedstrijden dit oplevert.

3 Oplossen $T_n = 52$.

4 Het is een rekenkundige rij.

5 Het aantal bladeren na n jaar is $T_1 + T_2 + \ldots + T_n$. Gebruik de sigmafunctie op de rekenmachine.

6 Het aantal jaren ligt nu vast, maar a varieert. Een vergelijkbare aanpak als bij de vorige vraag.

7 Voor elk van de vier onderdelen zijn vijf kleuren beschikbaar.

8 Buitenste vierkant levert $4 \cdot 125$ enzovoorts.

9 *som* berekenen door alles in te vullen. Delen door het aantal rijen.

10 p is het aantal rijen. Bepaal hiermee formules voor het aantal termen en de laatste term.

11 Zoek de gewenste uitkomst in een tabel van de formule voor *magisch getal* in de rekenmachine.

12 Het aantal woningen groeit lineair. Bereken met de rekenmachine wanneer het aantal inwoners vier keer zo groot is als het aantal woningen.

13 Alleen de formule voor het aantal woningen aanpassen.

14 Stel een formule op voor het aantal woningen dat in jaar n wordt gebouwd. Gebruik de sigmafunctie op de rekenmachine.

15 Stel geschikte formules op om na elk jaar het aantal inwoners en het aantal woningen te kunnen vergelijken. Gebruik de sigmafunctie.

16 Vul de recursieve formule in de rekenmachine in. Maar het kan ook met simpel telwerk.

17 Deel de opeenvolgende getallen door elkaar en noteer de uitkomsten met voldoende nauwkeurigheid.

Uitwerkingen bij hoofdstuk 5

WK 2010

1 Als er 4 teams in een poule zitten en elk team eenmaal tegen elk ander team speelt, zijn er $\binom{4}{2} = 6$ wedstrijden per poule want het gaat om het aantal combinaties van 2 uit een totaal van 4 teams.
andere manier
De teams A, B, C en D spelen elk eenmaal tegen elkaar. A speelt tegen B, C en D. Voor B resteren dan de wedstrijden tegen C en D. Tenslotte is er nog de wedstrijd van C tegen D. Zes wedstrijden in totaal per poule.

- 1974
In 1974 waren er 4 poules van 4 teams waarin $4 \cdot 6 = 24$ wedstrijden werden gespeeld.
De 8 overgebleven teams speelden 4 knock-out wedstrijden (kwartfinales).
Daarna speelden de 4 overgebleven teams 2 knock-out wedstrijden (halve finales).
Tenslotte volgden nog de troostfinale en de finale.
In 1974 werden er in totaal $24 + 4 + 2 + 1 + 1 = 32$ wedstrijden gespeeld.

- 2010
In 2010 waren er 8 poules van 4 teams waarin $8 \cdot 6 = 48$ wedstrijden werden gespeeld.
De 16 overgebleven teams speelden 8 knock-out wedstrijden (achtstefinales).
De 8 overgebleven teams speelden 4 knock-out wedstrijden (kwartfinales).
Daarna speelden de 4 overgebleven teams 2 knock-out wedstrijden (halve finales).
Tenslotte volgden nog de troostfinale en de finale.
In 2010 werden er in totaal $48 + 8 + 4 + 2 + 1 + 1 = 64$ wedstrijden gespeeld.

Het aantal wedstrijden is inderdaad verdubbeld.

2 $W(n)$ is het aantal wedstrijden in een poule van n teams.
Als er een team wordt toegevoegd, dan moet dit team tegen elk van de n teams uit de vorige situatie spelen. Er komen dus n wedstrijden bij.
$W(n + 1)$, het aantal wedstrijden in een poule met $n + 1$ teams is dus n groter dan het aantal wedstrijden in een poule met n teams.
In formulevorm: $W(n + 1) = W(n) + n$.

Trichans

3 Het aantal takken is 52 als $T_n = 52 \Leftrightarrow 1 + 3n = 52 \Leftrightarrow n = 17$.
Na 17 jaar zijn er 52 takken.

4 Elk jaar komen er drie takken bij dus het is een rekenkundige rij.
Een recursieve formule hierbij is:

$$\begin{cases} T_n = T_{n-1} + 3 \\ T_1 = 4 \end{cases}$$

5 Het aantal bladeren na n jaar is $T_1 + T_2 + \ldots + T_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$.
Voer in de rekenmachine in $y_1 = \sum_{k=1}^{x} (1 + 3k)$.
Een tabel:

x	1	2	...	14	15	16
y_1	4	11	...	329	375	424

Na 15 jaar is het totale aantal bladeren 375.

6 Nu is de vraag voor welke a de optelling $T_1 + T_2 + \ldots + T_8$ uitkomt op 160.
Verander de formule in de rekenmachine naar $y_1 = \sum_{k=1}^{8}(x+3k)$.
Een tabel:

x	1	2	...	6	7	8
y_1	116	124	...	156	164	172

Als $a = 6$ zijn er na 8 jaar 156 bladeren, maar als $a = 7$ zijn er na 8 jaar al 164 bladeren.
Omdat a, het aantal takken dat in het eerste jaar wordt gevormd, een geheel getal moet zijn, is er geen enkele soort Trichans Officinalis met 160 bladeren na 8 jaar.

Vierkanten

7 Voor elk van de vier onderdelen zijn vijf kleuren beschikbaar, dus er kunnen in totaal $5^4 = 625$ verschillende vierkanten gemaakt worden.

8 Figuur 2 is van buiten naar binnen zwart-lichtgrijs-zwart-wit, dus het afgebeelde getal is $4 \cdot 125 + 1 \cdot 25 + 4 \cdot 5 + 0 \cdot 1 = 545$.

9 Het aantal termen is 625 en het aantal rijen is 25.
$som = 0{,}5 \cdot 625 \cdot (0 + 624) = 195\,000$ dus het magische getal is $\frac{195\,000}{25} = 7800$.

10 p is het aantal rijen dus het aantal termen is p^2. Eerste term = 0, laatste term = $p^2 - 1$.

$$magisch\ getal = \frac{som}{aantal\ rijen} = \frac{0{,}5 \cdot p^2(0+(p^2-1))}{p} = \frac{0{,}5 \cdot p^2(p^2-1)}{p} =$$

$0{,}5 \cdot \frac{p^2}{p} \cdot (p^2-1) = 0{,}5 \cdot p \cdot (p^2-1)$ dus de formule is juist.

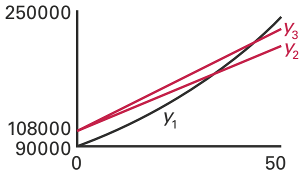
11 Voer in de rekenmachine in de formule van *magisch getal* $y_1 = 0{,}5 \cdot x \cdot (x^2-1)$.
Een tabel hierbij:

x	$y_1 = 0{,}5 \cdot x \cdot (x^2-1)$
10	495
11	660
12	858
13	1092

Alleen voor $p = 11$ en $p = 12$ ligt het magische getal tussen 500 en 1000.

Woningnood

12 De groei van het aantal woningen W is lineair dus een mogelijke formule voor het aantal woningen is $W = 27\,000 + 500t$. De woningnood begint als het aantal inwoners meer dan vier keer zo groot is als het aantal woningen.
Voer nu in de rekenmachine in $y_1 = 90\,000 \cdot 1{,}02^x$ en $y_2 = 4 \cdot (27\,000 + 500x)$.
De optie *intersect/snijpunt* geeft $x \approx 33{,}7$ dus in de loop van 2043 zal voor het eerst woningnood optreden.



13 Voer nu in de rekenmachine in $y_1 = 90\,000 \cdot 1{,}02^x$ en $y_3 = 4 \cdot (27\,000 + 600x)$.
De optie *intersect/snijpunt* geeft $x \approx 43{,}2$
$43{,}2 - 33{,}7 = 9{,}5$ dus als er elk jaar 600 woningen worden gebouwd in plaats van 500 wordt de woningnood ongeveer 9,5 jaar uitgesteld.

14 Het aantal woningen dat in jaar n wordt gebouwd is $A_n = 500 + 10n$ met $n = 0$ in 2010. Het aantal woningen dat in de periode 2010 – 2030 wordt gebouwd is $A_0 + A_1 + \ldots + A_{20}$.
Deze optelling kan met de sigmafunctie op de rekenmachine worden gemaakt:
$\sum_{n=0}^{20}(500 + 10n) = 12\,600$.

15 Voer in de rekenmachine in $y_4 = 90\,000 \cdot 1{,}02^{x+1}$ en $y_5 = 4 \cdot \left(27000 + \sum_{n=0}^{x}(500 + 10n)\right)$.

y_4 geeft het aantal inwoners aan het eind van jaar x en y_5 geeft vier keer het aantal woningen na jaar x. Als $y_4 > y_5$ is er sprake van woningnood.
Een tabel van beide formules:

x	y_4	y_5
60	301 199	303 200
61	307 223	307 640
62	313 367	312 120

Aan het eind van jaar $x = 62$ is $y_4 > y_5$ dus in de loop van het jaar 2072 ontstaat woningnood.

Fibonacci

16 Voer de recursieve formule in de rekenmachine in.

*n*Min = 1

u(*n*) = u(*n* – 1) + u(*n* – 2)

u(1) = 1

u(2) = 1

Een tabel hierbij:

n	1	2	3	4	5	...	11	12	13	14	15
u(*n*)	1	1	2	3	5	...	89	144	233	377	610

Alleen de 12e, 13e en 14e term liggen tussen 100 en 500. Dat zijn er dus 3.

andere manier
Door steeds de twee voorgaande getallen op te tellen kan de tabel hierboven ook zonder rekenmachine worden gemaakt.

17 Steeds twee opeenvolgende Fibonacci-getallen door elkaar delen: $\frac{1}{1} = 1$; $\frac{2}{1} = 2$;

$\frac{3}{2} = 1{,}5$; $\frac{5}{3} = 1{,}66666...$; $\frac{8}{5} = 1{,}6$; $\frac{13}{8} = 1{,}625$; $\frac{21}{13} = 1{,}61538...$; $\frac{34}{21} = 1{,}61904...$;

$\frac{55}{34} = 1{,}61764...$; $\frac{89}{55} = 1{,}61818...$; $\frac{144}{89} = 1{,}61797...$; $\frac{233}{144} = 1{,}61805...$; $\frac{377}{233} = 1{,}61802...$

De breuken zijn aanvankelijk om-en-om kleiner dan 1,6180 en groter dan 1,6181, maar vanaf $\frac{233}{144} = 1{,}61805...$ zijn de uitkomsten tussen 1,6180 en 1,6181.

Het gevraagde tweetal opeenvolgende getallen is 144 en 233.
Om het voorgaande te kunnen beslissen, moeten de breuken in ten minste 5 decimalen berekend worden.

©ThiemeMeulenhoff

6 Verandering en helling

Sauna

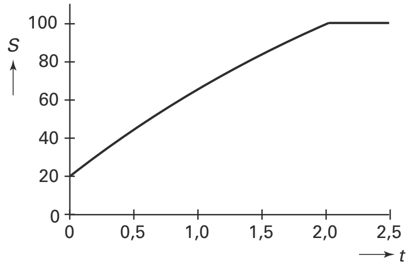
Om 15:00 uur wordt het verwarmingselement van een sauna aangezet. Vanaf dat moment wordt de sauna opgewarmd. Voor het opwarmen geldt de formule

$S = 200 - 180 \cdot e^{-0{,}29t}$

Hierin is *S* de temperatuur in de sauna in graden Celsius en *t* de tijd in uren vanaf 15:00 uur.

De thermostaat van de sauna is ingesteld op 100 °C. Zodra die temperatuur bereikt is, wordt het opwarmen gestopt. Vanaf dat moment wordt de temperatuur constant gehouden.
In figuur 1 staat de grafiek van *S*.

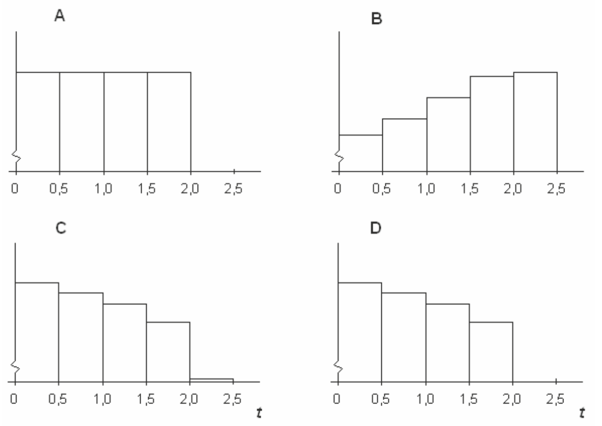
figuur 1



1 Bereken hoe laat het opwarmen wordt gestopt. Geef het tijdstip in minuten nauwkeurig.

Om na te gaan hoe de opwarming van de sauna verloopt, wil men kijken naar een toenamediagram dat hierbij hoort. In figuur 2 zie je vier toenamediagrammen, allemaal met een stapgrootte van een half uur, voor de periode van 15:00 uur tot 17:30 uur.

figuur 2



©ThiemeMeulenhoff

2 Welk van de in figuur 2 geschetste diagrammen is het juiste toenamediagram? Licht je antwoord toe.

Als je in de grafiek van S naar het opwarmen kijkt, lijkt de temperatuur afnemend te stijgen.

3 Onderzoek met behulp van differentiëren of deze conclusie juist is.

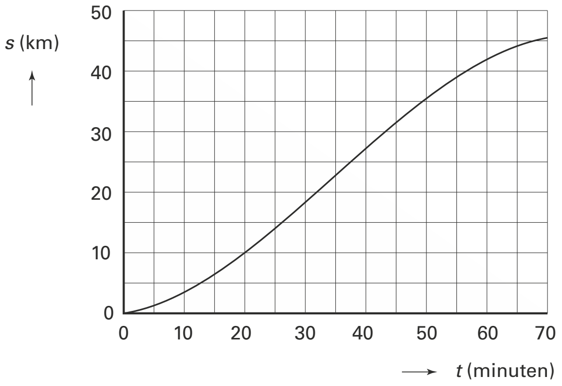
4 Bereken $S'(1)$, afgerond op 1 decimaal en geef de betekenis ervan in deze situatie.

Om bij een ingestelde temperatuur van de thermostaat uit te rekenen hoe lang de sauna nodig heeft om deze temperatuur te bereiken, kun je een formule gebruiken die t uitdrukt in S.

5 Druk t uit in S.

Wielrennen

Hester rijdt op haar racefiets een tijdrit van 45,5 km in precies 70 minuten.
In onderstaande figuur staat het verband tussen de tijd t in minuten en de afstand s in kilometer.



Bij deze grafiek past de formule $s(t) = -0{,}0002t^3 + 0{,}021t^2 + 0{,}16t$

6 Bereken haar gemiddelde snelheid over de hele rit in km/uur.

7 Bereken de snelheid van Hester op het tijdstip $t = 30$ door het differentiequotiënt op een interval met breedte 0,001 uit te rekenen.

Tijdens de fietstocht zijn er twee tijdstippen geweest waarop haar snelheid gelijk was aan de gemiddelde snelheid over het hele traject.

8 Lees deze tijdstippen in de figuur af en licht je antwoord toe.

De snelheid waarmee Hester fietst tijdens de tijdrit kan met behulp van de grafische rekenmachine worden benaderd.

9 Bereken op welke tijdstippen haar snelheid gelijk was aan 39 km per uur.

10 Voor welke waarden van t is de grafiek van s afnemend stijgend?

©ThiemeMeulenhoff

Varkenspest

Eind januari 1997 brak in Nederland de varkenspest uit. Om verspreiding van de ziekte te voorkomen is elk bedrijf waar deze ziekte werd geconstateerd, geruimd. Dat hield in dat alle varkens van zo'n bedrijf werden afgevoerd.
Vanaf het begin publiceerde het Ministerie van Landbouw, Natuurbeheer en Visserij wekelijks bij hoeveel bedrijven er tot dan toe varkenspest was geconstateerd. Dit noemen we het aantal besmette bedrijven. De eerste telling op vrijdag 7 februari 1997 (we noemen dat $n = 0$) leverde 4 besmette bedrijven op. Vier weken later waren er in totaal 37 bedrijven besmet. Dat betekent dus dat er in de periode van 7 februari tot 7 maart bij 33 bedrijven varkenspest werd ontdekt.
In de tabel zie je enkele resultaten van die tellingen.

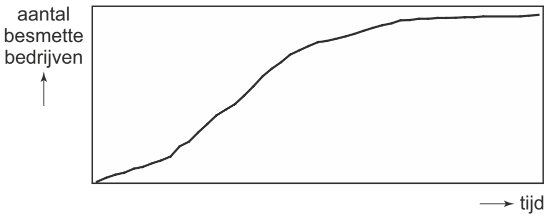
einddatum week	7 februari	7 maart	4 april	2 mei
aantal weken vanaf het begin	$n = 0$	$n = 4$	$n = 8$	$n = 12$
aantal besmette bedrijven	4	37	68	151

Je kunt narekenen dat het aantal besmette bedrijven in de periode 7 maart – 4 april relatief minder toenam dan in de periode 4 april – 2 mei.

11 Ga dit na door te berekenen met hoeveel procent het aantal besmette bedrijven toenam in elk van beide perioden.

Het resultaat van de wekelijkse tellingen zie je in figuur 1 weergegeven in de vorm van een globale grafiek. De tijd waarop deze grafiek betrekking heeft, beslaat bijna een jaar.

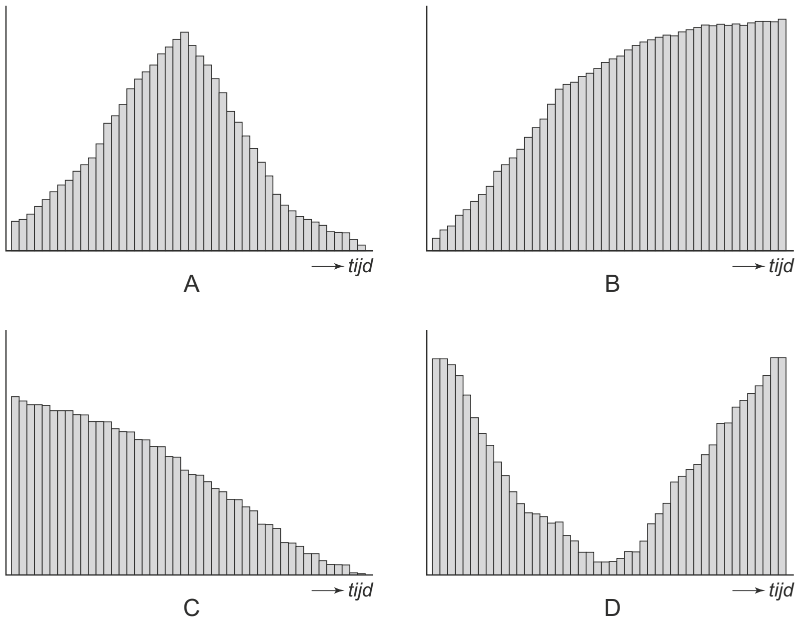
figuur 1 Cumulatief verloop aantal besmette bedrijven



Het resultaat van de wekelijkse tellingen kunnen we ook weergeven in een toenamediagram.
In figuur 2 staan vier toenamediagrammen over dezelfde periode als waarover figuur 1 is getekend. De wekelijkse toename van het aantal besmette bedrijven wordt met staafjes aangegeven.

©ThiemeMeulenhoff

figuur 2



Eén van deze vier toenamediagrammen past goed bij figuur 1.

12 Welke van de vier past goed bij figuur 1? Licht je antwoord toe.

Boomgroei

Naar de groei van bomen is veel onderzoek gedaan. Dat heeft geleid tot een goed inzicht in het verband tussen de hoogte van een boom en de leeftijd van die boom. In de bosbouw wordt voor veel bomen de te verwachten hoogte berekend met de formule van Chapman-Richards:

$$h = a(1 - b^t)^c$$

Hierin is h de hoogte van een boom in meters en t de leeftijd in jaren.
De waarden van de getallen a, b en c hangen af van de soort boom. De getallen a, b en c zijn positief. In onderstaande tabel zijn deze waarden voor enkele boomsoorten weergegeven.

boom	a	b	c
Japanse lariks	23,743	0,9603	1,22770
zomereik	39,143	0,9867	0,96667
Amerikaanse eik	29,026	0,9790	0,80820
berk	43,281	0,9876	0,95040
grove den	24,426	0,9656	1,59980

Het verband tussen de hoogte en de leeftijd van de zomereik wordt dus gegeven door de formule:

$$h = 39{,}143(1 - 0{,}9867^t)^{0{,}96667}$$

De zomereik wordt op den duur veel groter dan de Amerikaanse eik, maar in de eerste levensjaren groeit de Amerikaanse eik veel sneller.

13 Toon door berekening aan dat volgens de formule van Chapman-Richards de Amerikaanse eik in het vierde levensjaar ruim 20 cm méér groeit dan de zomereik.

Elke boom groeit, maar die groei gaat steeds langzamer. We kunnen dit nagaan met behulp van de afgeleide van h. Dat gaan we hier doen voor de zomereik.
Voor de snelheid waarmee deze boomsoort groeit, kijken we naar de formule voor de afgeleide:

$$h' = \frac{0{,}507 \cdot 0{,}9867^t}{(1 - 0{,}9867^t)^{0{,}03333}}$$

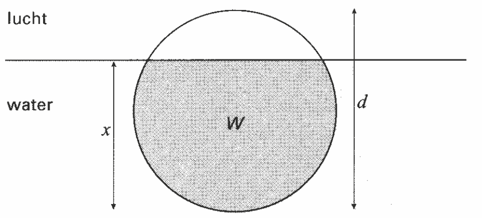
Aan de vorm van deze afgeleide kun je door redeneren, dus **zonder** berekeningen uit te voeren, zien dat de zomereik steeds groeit en dat die groei steeds langzamer gaat.

14 Laat zien (door een redenering) hoe uit de formule van de afgeleide volgt dat de zomereik steeds groeit en dat deze groei steeds langzamer gaat.

Bal uit het water

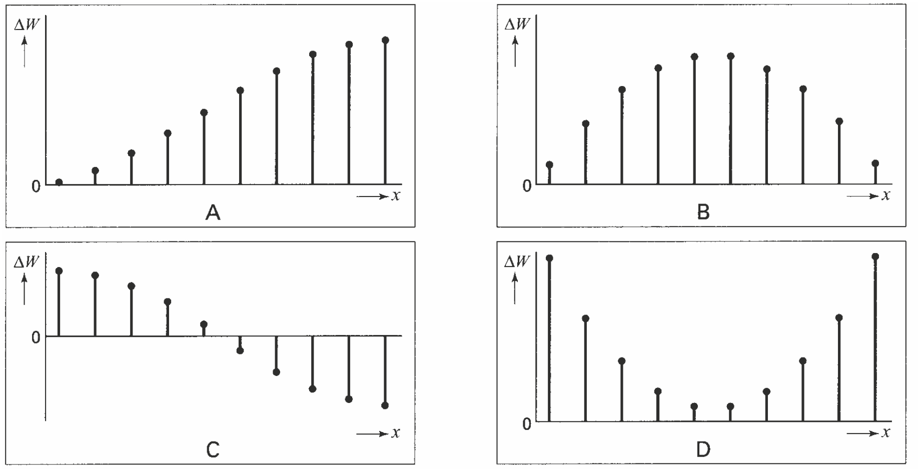
Je hebt vast wel eens in het zwembad met een bal gespeeld. Je hebt dan misschien gemerkt dat het niet meevalt om een bal helemaal onder water te duwen. En heb je de bal onder water dan valt het niet mee hem onder water op zijn plaats te houden. Als je de bal onder water loslaat dan schiet hij omhoog en springt soms een aardig stuk boven het water uit.
In deze opgave nemen we aan dat de bal niet vervormt, dus steeds zuiver rond blijft.

figuur 1



In figuur 1 is de bal gedeeltelijk onder water. De diameter van de bal is d. De afstand van de onderkant van de bal tot het wateroppervlak noemen we x. W is het volume van het deel van de bal dat *onder water* is.
Je hebt de bal boven water en duwt hem langzaam in het water tot hij helemaal onder water is. In figuur 2 zie je vier diagrammen, waarin de *toename* van W (notatie ΔW) is weergegeven. Drie van de vier diagrammen zijn niet goed.

figuur 2



15 Welk van deze toenamediagrammen past bij het onder water duwen van de bal? Licht je antwoord toe.

Dennenhout

Een deel van de bossen in Nederland is bestemd voor de houtindustrie. Voordat een bos wordt gekapt, onderzoekt men meestal eerst hoeveel m^3 hout het bos op zal leveren. Dit gebeurt aan de hand van de diameter van bomen. De diameter van een boom wordt gemeten op een vaste hoogte.

Een voorbeeld van een boom die gebruikt wordt in de houtindustrie is de grove den (Pinus sylvestris). Zie de figuur.

Een bos met grove dennen moet worden gekapt. Alvorens tot de kap over te gaan wordt eerst een schatting gemaakt van de houtopbrengst. Hiertoe worden de diameters van de bomen opgemeten en ingedeeld in klassen. Zie de tabel.

diameter in m	frequentie	volume in m^3 van een boom met een diameter gelijk aan het klassenmidden	totaal volume per klasse
0 – 0,05	2730	0,0011	3,0
0,05 – 0,10	1854	0,0200	37,1
0,10 – 0,15	1261	0,0747	94,2
0,15 – 0,20	874	0,1763	154,1
0,20 – 0,25	437	0,3330	145,5
0,25 – 0,30	131	0,5516	72,3

V is het volume aan hout in een boom in m^3. Een formule voor V is:

$V = 13 \cdot d^{4,65} + 16 \cdot d^{3,65} + 20 \cdot d^{2,65}$ met de diameter d in meter.

We bekijken de grafiek van V alleen maar voor waarden van d tussen 0 en 1,2. Iemand beweert dat de grafiek van V op dit stuk toenemend stijgend is.

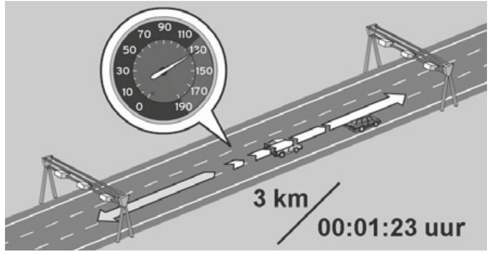
16 Stel de afgeleide functie van V op en toon met de grafiek van deze afgeleide functie aan dat deze bewering juist is.

In de derde kolom van de tabel staat het volume in m^3 van een boom met een diameter gelijk aan het klassenmidden. Door de getallen in de tweede kolom te vermenigvuldigen met de getallen in de derde kolom wordt een schatting verkregen van de bijdrage van elke klasse aan de totale houtopbrengst, zie de vierde kolom in de tabel. Door de getallen in de vierde kolom op te tellen krijg je een schatting van ongeveer 506,2 m^3 voor de totale houtopbrengst. Als we ervan uit gaan dat de diameters in een klasse gelijkmatig verdeeld zijn, zal deze schatting afwijken van de werkelijke houtopbrengst.

17 Is de werkelijke houtopbrengst groter of kleiner dan 506,2 m^3? Licht je antwoord toe en maak daarbij gebruik van de toenemende stijging van V (zie vorige vraag).

Snelheidscontroles en boetes

De politie controleert de snelheden van auto's op snelwegen op verschillende manieren. Een betrekkelijk nieuwe manier is de zogeheten **trajectcontrole**. Met een camera wordt een auto aan het begin en aan het eind van een traject gefotografeerd. Met een simpel rekensommetje (lengte van het traject gedeeld door de tijd) berekent de computer hoe hard de auto gemiddeld gereden heeft over het traject.



Op een voorlichtingssite van het Openbaar Ministerie wordt dit toegelicht met een voorbeeld. Zie de figuur hiernaast.
In dit voorbeeld legt een auto een traject van 3 km af in 00:01:23 uur (1 minuut en 23 seconden). De gemiddelde snelheid is dan 130 km/uur.
Bij dergelijke metingen zijn altijd kleine meetfouten mogelijk. Daarom krijgen automobilisten pas bij een overschrijding van 4 km/uur of meer een boete.

Op sommige trajecten vindt de controle met meer dan twee cameraposten plaats; voor ieder deeltraject wordt dan apart de gemiddelde snelheid berekend.
De hoogte van deze gemiddelde snelheden bepaalt dan of er een boete volgt.
Op de N256 geldt een maximumsnelheid van 80 km/uur. Op deze weg is een traject van 9 km opgedeeld in deeltraject A van 4 km en deeltraject B van 5 km.
Een automobilist rijdt met hoge snelheid en remt in de loop van het traject flink af.
Hij legt deeltraject A af met een gemiddelde snelheid van 120 km/uur en deeltraject B met een gemiddelde snelheid van 60 km/uur.
Voor het eerste deeltraject wordt hij beboet.

18 Onderzoek door een berekening of deze automobilist een boete zou krijgen als het traject van 9 km **niet** opgedeeld zou zijn in deeltrajecten.

Justitie onderscheidt drie soorten wegen, elk met een eigen boetesysteem: buiten de bebouwde kom, autosnelwegen en binnen de bebouwde kom.

Buiten de bebouwde kom geldt voor auto's een maximumsnelheid van 80 km/uur. Voor de boetebedragen bij snelheidsovertredingen buiten de bebouwde kom geldt (bij benadering) de volgende formule:

$B_{buiten} = 16{,}527 \cdot 1{,}092^{s}$

Hierbij is s de overschrijding van de maximumsnelheid in km/uur en B_{buiten} het onafgeronde boetebedrag in euro's. Het uiteindelijke boetebedrag wordt afgerond op hele euro's.
Bijvoorbeeld: bij een snelheid v = 90 km/uur hoort een snelheidsoverschrijding s = 10 km/uur. Het bijbehorende boetebedrag in euro's is $16{,}527 \cdot 1{,}092^{10} \approx 39{,}85$ en dit wordt afgerond op 40 euro.

Verkeersonderzoekers gebruiken liever een formule waarin niet de snelheidsoverschrijding s voorkomt, maar de werkelijke snelheid v in km/uur.
Zo'n formule is van de vorm $B_{buiten} = a \cdot 1{,}092^{v}$.

19 Bereken de constante a in vier decimalen nauwkeurig.

Het boetebedrag op de autosnelweg (in euro's) hangt ook af van de grootte van de overschrijding van de maximumsnelheid (in km/uur). Zie onderstaande tabel.

snelheidsoverschrijding (km/uur)	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
boetebedrag (€)	16	20	24	27	32	37	40	45	51	56	62

Omdat bij hogere snelheden het risico van een ongeval steeds meer toeneemt, vertonen de boetebedragen in de tabel een toenemende stijging. Althans, zo lijkt het op het eerste gezicht, maar de stijging van de boetebedragen is soms afnemend. Een voorbeeld: als de overschrijding toeneemt van 5 km/uur naar 6 km/uur neemt het boetebedrag met 4 euro toe, terwijl van 6 km/uur naar 7 km/uur de toename 3 euro is. Dat komt doordat de boetebedragen eerst met een formule zijn berekend en vervolgens afgerond op hele euro's.

Voor de boetebedragen bij snelheidsovertredingen **binnen** de bebouwde kom geldt (bij benadering) de volgende formule:

$B_{binnen} = 3{,}018 \cdot s^{1{,}212}$

Hierbij is s de overschrijding van de maximumsnelheid in km/uur en B_{binnen} het onafgeronde boetebedrag in euro's. Het uiteindelijke boetebedrag wordt afgerond op hele euro's.

20 Toon aan dat zich bij deze formule ook het verschijnsel voordoet dat de stijging van de **afgeronde** boetebedragen soms afnemend is.

21 Stel een formule op voor de afgeleide van B_{binnen} en toon daarmee aan dat de **onafgeronde** boetebedragen bij deze formule toenemend stijgen.

Hints bij hoofdstuk 6

1 Stel een vergelijking op en los deze met de rekenmachine (of algebraïsch) op. Afronden op minuten.

2 In figuur 1 is te zien dat de grafiek de eerste 2 uur afnemend stijgt.

3 Differentiëren met de kettingregel.

4 Een afgeleide functie bepaalt de snelheid van verandering.

5 Formule van S algebraïsch omwerken.

6 Eerst het gemiddelde in km/minuut bepalen en daarna omrekenen naar km/uur.

7 Het differentiequotiënt is $\frac{\text{verandering van } s}{\text{verandering van } t}$.

8 Teken de verbindingslijn tussen begin- en eindpunt in de gegeven grafiek.

9 Gebruik nDeriv op je grafische rekenmachine. Iets minder nauwkeurig is de methode met $y_2 = (y_1(x + 0{,}0001) - y_1(x)) / 0{,}0001$.

10 Zoek het maximum van de snelheidsfunctie met behulp van de rekenmachine.

11 Gebruik tweemaal: $\frac{\text{stijging}}{\text{beginaantal}} \cdot 100\%$

12 Kijk naar figuur 1 en onderzoek of de toenamen het eerste halfjaar groter of kleiner zijn dan die in het tweede halfjaar.

13 Het vierde levensjaar loopt van $t = 3$ tot $t = 4$.

14 Onderzoek het gedrag van de teller en de noemer voor toenemende t. Denk aan: positief/negatief en stijgen/dalen.

15 Vergelijk de toename van W bij het begin van de onderdompeling met de toename van W als de bal al half onder water is.

16 Plot de grafiek van de afgeleide van V op $0 < d < 1{,}2$.

17 Gebruik de bewering van vraag 16.

18 Bereken de tijd die de automobilist over de deeltrajecten A en B doet. Tel deze op en bereken met het resultaat de gemiddelde snelheid over het gehele traject.

19 Druk v uit in s en substitueer de gevonden formule in B_{buiten}. Een aanpak met het getallenvoorbeeld in de opgave werkt ook.

20 Maak een tabel bij de formule en zoek waar de toename van het afgeronde boetebedrag kleiner is dan de toename ervoor.

21 Onderzoek het gedrag van de afgeleide functie. Merk op dat s alleen positieve waarden kan aannemen.

Uitwerkingen bij hoofdstuk 6

Sauna

1 De vergelijking $200 - 180 \cdot e^{-0{,}29t} = 100$ moet worden opgelost.
Voer in de rekenmachine in $y_1 = 200 - 180 \cdot e^{-0{,}29x}$ en $y_2 = 100$ met dezelfde vensterinstelling als in de opgave.
De optie *intersect/snijpunt* geeft $x = 2{,}026...$ dus na 2,026... uur wordt het opwarmen gestopt. Dat is na 2 uur en $60 \cdot 0{,}026... = 1{,}61... \approx 2$ minuten.
Het opwarmen stopt om 17:02 uur.
andere manier
De vergelijking $200 - 180 \cdot e^{-0{,}29t} = 100$ *kan ook algebraïsch worden opgelost:*

$$200 - 180 \cdot e^{-0{,}29t} = 100 \Leftrightarrow 180 \cdot e^{-0{,}29t} = 100 \Leftrightarrow e^{-0{,}29t} = \frac{100}{180} \Leftrightarrow -0{,}29t = \ln\left(\frac{100}{180}\right) \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{100}{180}\right)}{-0{,}29} = 2{,}026...$$

2 In figuur 1 is te zien dat de grafiek de eerste 2 uur afnemend stijgt. Hierbij passen alleen de diagrammen C en D. Uit de vorige vraag weten we dat na 2 uur de opwarming nog ongeveer 2 minuten doorgaat, dus is er nog een kleine toename van de temperatuur in het laatste halfuur. Het juiste toenamediagram is daarom D.

3 $S = 200 - 180 \cdot e^{-0{,}29t} \Rightarrow S' = -180 \cdot -0{,}29 \cdot e^{-0{,}29t} = 52{,}2 \cdot e^{-0{,}29t}$
Voor elke waarde van t is $52{,}2 \cdot e^{-0{,}29t}$ positief, dus S stijgt.
Als t toeneemt, wordt $-0{,}29t$ sterker negatief, dus dan neemt $52{,}2 \cdot e^{-0{,}29t}$ af, maar blijft wel positief. S is dus afnemend stijgend.

4 $S'(1) = 52{,}2 \cdot e^{-0{,}29 \cdot 1} = 39{,}059... \approx 39{,}1$ betekent dat de temperatuur om 16:00 uur stijgt met een snelheid van 39,1 graden Celsius per uur.
Dit betekent niet dat de temperatuur een uur later 39,1 graden Celsius hoger is, want de temperatuur S is afnemend stijgend.

5 $S = 200 - 180 \cdot e^{-0{,}29t} \Leftrightarrow 180 \cdot e^{-0{,}29t} = 200 - S \Leftrightarrow e^{-0{,}29t} = \frac{200 - S}{180} \Leftrightarrow$

$$-0{,}29t = \ln\left(\frac{200 - S}{180}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{200 - S}{180}\right)}{-0{,}29} \Leftrightarrow t \approx -3{,}45 \cdot \ln\left(\frac{200 - S}{180}\right)$$

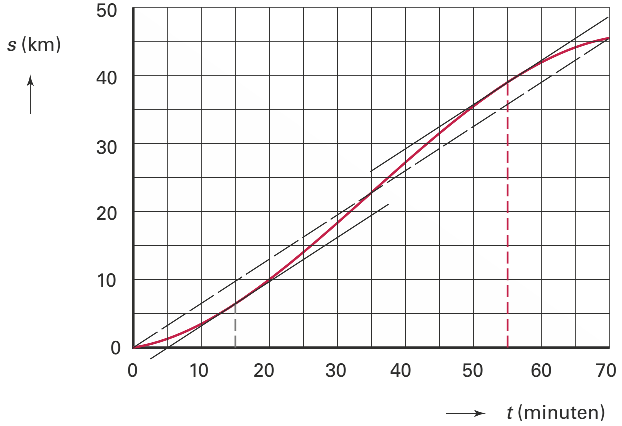
Wielrennen

6 Hester rijdt 45,5 km in 70 minuten dus gemiddeld $\frac{45{,}5}{70} = 0{,}65$ km/min en dat is $0{,}65 \cdot 60 = 39$ km/uur.

7 $s(30{,}001) = 18{,}30088$ en $s(30) = 18{,}3$ dus Hesters snelheid op $t = 30$ is ongeveer

$$\frac{s(30{,}001) - s(30)}{30{,}001 - 30} = \frac{18{,}30088... - 18{,}3}{0{,}001} \approx 0{,}88 \text{ km/min en dat is } 0{,}88 \cdot 60 = 52{,}8 \text{ km/uur.}$$

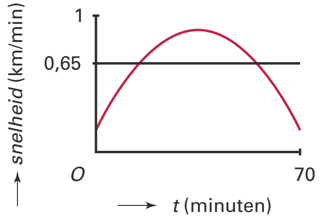
8 De gemiddelde snelheid over het gehele traject is gelijk aan de helling van de verbindingslijn tussen begin- en eindpunt van de grafiek. In de grafiek moet nu gezocht worden naar punten waarin de raaklijn evenwijdig aan deze lijn loopt.



Een beetje schuiven met de geodriehoek leidt tot de conclusie dat Hester op $t \approx 15$ en $t \approx 55$ even snel fietst als ze gemiddeld fietste over de hele tijdrit.

9 Een snelheid van 39 km/uur is gelijk aan 0,65 km/min (zie vraag 6). De rekenmachine kan een helling (= snelheid) benaderen met nDeriv.
Vul in de rekenmachine in: $y_1 = \text{nDeriv}(-0{,}0002x^3 + 0{,}021x^2 + 0{,}16x, x, x)$ of

$$y_1 = \frac{d}{dx}\left(-0{,}0002x^3 + 0{,}21x^2 + 0{,}16x\right)_{x=x}$$



De grafiek die hierbij hoort geeft de snelheid van Hester weer in km/min. Bereken het snijpunt van deze grafiek met de grafiek van $y_2 = 0{,}65$ via de optie *intersect/snijpunt.*
Dit geeft $t \approx 14{,}8$ en $t \approx 55{,}2$.
In de vragen 8 en 9 wordt gezocht naar dezelfde tijdstippen, dus de antwoorden moeten (ongeveer) gelijk zijn.

10 De grafiek van s is afnemend stijgend als Hesters snelheid daalt. In de grafiek bij de uitwerking van de vorige vraag kan met de rekenmachine via de optie maximum berekend worden dat Hesters snelheid maximaal is op tijdstip $t = 35$.
s is afnemend stijgend voor $35 < t \leq 70$.

Varkenspest

11 In de periode 7 maart – 4 april nam het aantal besmette bedrijven toe met 68 – 37= 31. Dat is een stijging met $\frac{31}{37} \cdot 100 \approx 84\%$. In de periode 4 april – 2 mei nam het aantal besmette bedrijven toe met 151 – 68 = 83. Dat is een stijging met $\frac{83}{68} \cdot 100 \approx 122\%$.

12 In figuur 1 is te zien dat in de eerste helft van het jaar de toenamen steeds groter worden (de grafiek stijgt steeds sneller). In de tweede helft van het jaar nemen de toenamen weer af (de grafiek stijgt steeds langzamer). Grafiek A past dus goed bij figuur 1.

Boomgroei

13 De formule voor de hoogte van de zomereik is $h = 39{,}143(1 - 0{,}9867^t)^{0{,}96667}$.

Na 3 jaar is de boom $h(3) = 39{,}143(1 - 0{,}9867^3)^{0{,}96667} = 1{,}7165...$ m hoog en na 4 jaar is de boom $h(4) = 39{,}143(1 - 0{,}9867^4)^{0{,}96667} = 2{,}2524...$ m hoog.
De zomereik groeit in het 4e levensjaar 2,2524... – 1,7165... = 0,5358... m ≈ 54 cm.

De formule voor de hoogte van de Amerikaans eik is $h = 29{,}026(1 - 0{,}979^t)^{0{,}8082}$.
De Amerikaanse eik groeit in het 4e levensjaar $h(4) - h(3)$ = 3,8222... – 3,055... = 0,767... m dus ongeveer 77 cm.
De Amerikaanse eik groeit in het vierde levensjaar ongeveer 77 – 54 = 23 cm meer dan de zomereik.

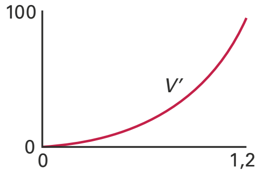
14 De teller $0{,}507 \cdot 0{,}9867^t$ is een dalende exponentiële functie die voor elke t een positieve uitkomst geeft.
In de noemer is $0{,}9867^t$ ook een dalende exponentiële functie die voor elke positieve t een uitkomst geeft tussen 0 en 1, maar dan is $1 - 0{,}9867^t$ een stijgende positieve functie.
Omdat zowel de teller als de noemer van h' positief zijn, zal de grafiek van h altijd stijgen.
Als t toeneemt, zal de teller van h' kleiner worden terwijl de noemer juist groter wordt. De breuk als geheel zal dan dalen, dus de stijging van h neemt af.
De zomereik groeit dus steeds, maar de groei gaat steeds langzamer.

Bal uit het water

15 Als de bal net het water in gaat, verandert W niet zo snel, maar als de bal half in het water is, verandert W sneller vanwege de grotere doorsnede van de bal in het midden. Als de bal bijna geheel onder water is, verandert W niet zo snel.
Diagram B past het best hierbij.

Dennenhout

16 Differentiëren van V geeft:
$V'(d) = 13 \cdot 4{,}65 \cdot d^{3{,}65} - 16 \cdot 3{,}65 \cdot d^{2{,}65} + 20 \cdot 2{,}65 \cdot d^{1{,}65} \Leftrightarrow$
$V'(d) = 60{,}45 \cdot d^{3{,}65} - 58{,}4 \cdot d^{2{,}65} + 53 \cdot d^{1{,}65}$
Voer nu in de rekenmachine in $y_1 = 60{,}45 \cdot x^{3{,}65} - 58{,}4 \cdot x^{2{,}65} + 53 \cdot x^{1{,}65}$.
Op het domein $0 < x < 1{,}2$ ziet de grafiek er zó uit:



De grafiek van y_1 ligt op $0 < x < 1{,}2$ boven de x-as $\Rightarrow$ $V' > 0$ op $0 < x < 1{,}2$ dus de grafiek van V is daar stijgend. Bovendien is grafiek van y_1, dus ook van V', stijgend op $0 < x < 1{,}2$ dus de grafiek van V is daar toenemend stijgend.

17 Omdat V toenemend stijgend is, groeit het volume in het begin van een klasse minder snel dan aan het eind van een klasse. De invloed van grotere diameters in een klasse op de houtopbrengst is groter dan de invloed van kleinere diameters in diezelfde klasse. De werkelijke houtopbrengst zal dan ook groter zijn dan 506,2 m^3.

Snelheidscontroles en boetes

18 Op deeltraject A rijdt de automobilist 120 km/uur = 2 km/minuut dus over deze 4 km doet hij 2 minuten. Op dit traject werd de automobilist beboet.
Op deeltraject B rijdt de automobilist 60 km/uur = 1 km/minuut dus over deze 5 km doet hij 5 minuten.
Over het hele traject van 9 km doet hij 7 minuten. Zijn gemiddelde snelheid is dan $\frac{9}{7}$ km/minuut = $\frac{9}{7} \cdot 60$ km/uur ≈ 77,1 km/uur. Deze snelheid is lager dan de maximumsnelheid van 80 km/uur dus deze automobilist zou geen boete krijgen als dit traject niet was opgesplitst.

19 Voor de werkelijke snelheid v geldt: $v = 80 + s$. Ingevuld in $B_{buiten} = a \cdot 1{,}092^v$ geeft dit:
$B_{buiten} = a \cdot 1{,}092^{80+s} = a \cdot 1{,}092^{80} \cdot 1{,}092^s$

Dit komt overeen met $B_{buiten} = 16{,}527 \cdot 1{,}092^s$ als $a \cdot 1{,}092^{80} = 16{,}527 \Leftrightarrow$
$a = \frac{16{,}527}{1{,}092^{80}} = 0{,}014467...$ dus in vier decimalen nauwkeurig: $a \approx 0{,}0145$

andere manier (met behulp van het getallenvoorbeeld in de opgave)

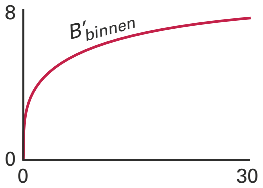
Bij $s = 10$ hoort $v = 90$ en $B_{buiten} = 40$. Deze gegevens invullen in $B_{buiten} = a \cdot 1{,}092^v$ geeft: $40 = a \cdot 1{,}092^{90} \Leftrightarrow a = \frac{40}{1{,}092^{90}} \approx 0{,}0145$

20 Voer in de rekenmachine in $y_1 = 3{,}018 \cdot x^{1{,}212}$ en maak een tabel.

snelheidsoverschrijding	4	5	6	7	8	9	10
boetebedrag (euro's)	16,196	21,226	26,475	31,914	37,520	43,277	49,172
afgerond boetebedrag	16	21	26	32	38	43	49
toename		5	5	6	6	**5**	6

De stijging van de afgeronde boetebedragen is soms afnemend, bijvoorbeeld bij de serie 32 → 38 → 43, waarbij na een toename van 6 euro een toename van 5 euro volgt.

21 Differentiëren van $B_{binnen} = 3{,}018 \cdot s^{1{,}212}$ geeft: $B'_{binnen} = 3{,}018 \cdot 1{,}212 \cdot s^{0{,}212} \approx 3{,}658 \cdot s^{0{,}212}$
In een plot van $y_1 = 3{,}658 \cdot x^{0{,}212}$ is te zien dat de afgeleide B'_{binnen} positief is als $s > 0$ dus de grafiek van B_{binnen} stijgt.



B'_{binnen} is niet alleen positief, maar stijgt ook, dus zal de grafiek van B_{binnen} toenemend stijgend zijn.
De onafgeronde boetebedragen die bij de gegeven formule horen, zijn dan dus toenemend stijgend.
andere manier (zonder plot)
$B'_{binnen} = 3{,}658 \cdot s^{0{,}212}$ is een machtsfunctie die alleen betekenis heeft voor positieve waarden van s. Omdat de exponent positief is, zal B'_{binnen} positief en stijgend zijn.
B_{binnen} is dan toenemend stijgend.

©ThiemeMeulenhoff

7 Afgeleide functies

Zevenkamp

Een relatief jong atletieknummer van de Olympische Spelen is de zevenkamp voor vrouwen. De vrouwen strijden in twee dagen op zeven verschillende baan- en veldonderdelen. De baanonderdelen zijn 100 meter horden, 200 meter en 800 meter hardlopen. De veldonderdelen zijn hoogspringen, kogelstoten, verspringen en speerwerpen.
De prestaties van elk onderdeel worden omgerekend naar punten. Deze punten worden vervolgens bij elkaar opgeteld waarna een ranglijst kan worden opgesteld.

De punten worden als volgt berekend:
- *Punten* = $A \cdot (B - X)^C$ voor baanonderdelen
- *Punten* = $A \cdot (X - B)^C$ voor veldonderdelen
- De puntenaantallen worden altijd naar beneden afgerond

A, B en C zijn constanten die per onderdeel verschillen, zoals te zien is in tabel 1 hieronder. X is de prestatie van de atleet in eenheden zoals deze in de laatste kolom staat weergegeven.

tabel 1

onderdeel	*A*	*B*	*C*	eenheden
100 m horden	9,23076	26,7	1,835	seconden
hoogspringen	1,84523	75	1,348	centimeters
kogelstoten	56,0211	1,5	1,05	meters
200 m hardlopen	4,99087	42,5	1,81	seconden
verspringen	0,188807	210	1,41	centimeters
speerwerpen	15,9803	3,8	1,04	meters
800 m hardlopen	0,11193	254	1,88	seconden

Jacky Joyner behaalde in 1988 een wereldrecord op de zevenkamp voor vrouwen. In tabel 2 staan per onderdeel de punten van Joyner en van Sabine John, de nummer 2.

tabel 2

rang	naam	100 m horden	hoog	kogel	200 m	ver	speer	800 m	totaal
1	Joyner	1172	1054	915	1123	1264	776	987	7291
2	John	1147	978	943	1015	1076	716	1022	6897

Voor de 100 meter horden geldt de volgende formule:

$P_{100m} = 9{,}23076 \cdot (26{,}7 - X)^{1{,}835}$

Hierbij is P_{100m} de hoeveelheid punten voor dit onderdeel en X de tijd op dit onderdeel in seconden.

©ThiemeMeulenhoff

Met behulp van tabel 2 en de formule kun je de tijd van Joyner berekenen op de 100 meter horden.

1 Bereken de tijd van Joyner op de 100 meter horden in 2 decimalen nauwkeurig.

Aan de formules is te zien dat de puntenaantallen voor veldonderdelen in theorie onbeperkt groot kunnen worden. Je zou een speer 1000 meter ver kunnen werpen, dat levert veel punten op. Er is geen bovengrens. Aan de formules is ook te zien dat de puntenaantallen voor de baanonderdelen wel een bovengrens hebben.

2 Bereken de bovengrens voor de 100 meter horden en bereken vervolgens hoe ver een atlete moet springen om ten minste ditzelfde aantal punten te behalen voor het onderdeel verspringen.

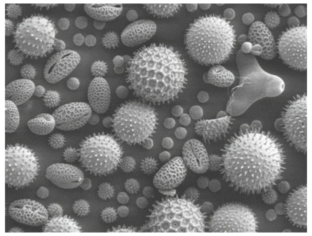
Met de afgeleide van de formule voor de 200 meter, P_{200m} , met de tijd X tussen 0 seconden en 42,5 seconden, is na te gaan of P_{200m} toenemend stijgend, toenemend dalend, afnemend stijgend of afnemend dalend is.

3 Bepaal deze afgeleide en onderzoek met behulp van een schets van de grafiek van deze afgeleide of P_{200m} toenemend stijgend, toenemend dalend, afnemend stijgend of afnemend dalend is.

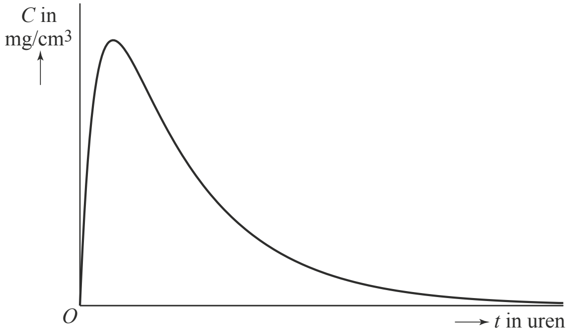
Hooikoorts

Hooikoorts is een vervelende allergische aandoening waar veel mensen last van hebben. Iemand die last heeft van hooikoorts, reageert op zogenoemde pollen in de lucht, die afkomstig zijn van bomen en grassen die in bloei staan. De allergische reactie veroorzaakt naast irritatie aan ogen, neus en keel ook hoest- en niesbuien.

uitvergrote pollen



PharmaCie brengt een nieuw medicijn tegen hooikoorts op de markt. Het nieuwe medicijn van PharmaCie wordt in pilvorm verkocht.
Als een patiënt klachten krijgt, neemt hij een pil. De werkzame stof komt dan via de maag en de darm in de bloedbaan terecht. De hoeveelheid werkzame stof in de bloedbaan stijgt eerst en neemt daarna af omdat de stof door het lichaam wordt afgebroken. De concentratie van de werkzame stof in de bloedbaan noemen we C. In de figuur zie je een schets van de grafiek van C.



Een onderzoeker van PharmaCie stelt de volgende formule op die dit verloop redelijk benadert:

$$C_1(t) = \frac{16t}{190t^2 + 60}$$

Hierin is C_1 de concentratie werkzame stof in mg/cm^3 en t de tijd in uren na het innemen van de pil.

4 Bereken met behulp van de afgeleide van C_1 na hoeveel minuten, gerekend vanaf het moment dat de pil is ingenomen, de concentratie werkzame stof maximaal is.

Een andere onderzoeker stelt een geheel andere formule op voor het verband tussen de tijd na het innemen van de pil en de concentratie werkzame stof:

$$C_2(t) = 0{,}13(e^{-0{,}65t} - e^{-3{,}9t})$$

Hierin is C_2 de concentratie werkzame stof in mg/cm^3 en t weer de tijd in uren na het innemen van de pil.

Aan de schets van de grafiek is te zien dat de werkzame stof na verloop van tijd nagenoeg uit het bloed verdwenen is. Met een redenering kun je aantonen dat elk van beide formules dit proces beschrijft.

5 Beredeneer aan de hand van de formules van C_1 en C_2 dat de werkzame stof volgens **beide** formules na verloop van tijd nagenoeg uit het bloed is verdwenen.

Hoewel de grafieken van C_1 en C_2 beide erg op de grafiek in de figuur lijken, verschillen de momenten waarop het maximum bereikt wordt wel van elkaar.

6 Onderzoek met behulp van de afgeleide C'_2 of het maximum van C_2 eerder of later dan het maximum van C_1 optreedt.

Pakketshop

Om een pakket te versturen, kun je bij het postkantoor en bij een aantal winkels terecht. Het tarief voor het versturen van een pakket wordt bepaald door de bestemming (de **zone**) en de afmetingen van het pakket (de **maat**). In deze opgave beperken we ons tot balkvormige pakketten.
De maat wordt berekend door de kortste en de langste zijde van het pakket bij elkaar op te tellen.
Hieronder vind je in de tabel de tarieven van DPD Pakketshop. Je ziet in de tabel bijvoorbeeld dat een pakket maat Small heeft als de lengte van de kortste en de langste zijde bij elkaar opgeteld hoogstens 50 cm is.

Tarieven

Bestemming, zone, maat & tarief	Small ≤ 50 cm	Medium ≤ 70 cm	Large ≤ 90 cm	Extra Large ≤ maximaal 175 cm
Nederland	€ 7,00	€ 9,00	€ 11,00	€ 13,00
Zone 1	€ 12,00	€ 15,00	€ 19,00	€ 22,00
Zone 2	€ 16,00	€ 19,00	€ 23,00	€ 28,00
Zone 3	€ 20,00	€ 25,00	€ 30,00	€ 40,00
Zone 4	€ 25,00	€ 30,00	€ 35,00	€ 45,00

DPD behoudt zich het recht voor tarieven tussentijds en met onmiddellijke ingang te wijzigen.
Meting vindt plaats in DPD Pakketshop.

Zone 1 België, Duitsland, Luxemburg
Zone 2 Denemarken, Frankrijk, Groot-Brittannië, Litouwen, Oostenrijk, Polen, Slovenië, Slowakije, Tsjechië
Zone 3 Hongarije, Italië, Spanje, Zweden
Zone 4 Bulgarije, Estland, Finland, Ierland, Letland, Portugal, Roemenië

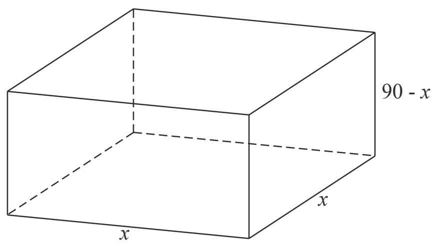
Tarieven per december 2008

Bijvoorbeeld: je wilt een pakket van 28 cm × 31 cm × 36 cm versturen naar Polen. De lengte van de kortste en de langste zijde bij elkaar opgeteld is dan 64 cm, dus het pakket heeft maat Medium. De kosten zijn dan € 19,00.

Maartje wil een pakket versturen naar Hongarije. De afmetingen van het pakket zijn 31 cm × 45 cm × 86 cm. Bij het postkantoor kost het versturen van dit pakket € 43,97.

7 Bereken hoeveel procent goedkoper het voor haar is om van DPD Pakketshop gebruik te maken.

Meneer Veer wil met DPD Pakketshop voor € 11,00 een pakket binnen Nederland versturen. Hij wil het volume van zijn pakket zo groot mogelijk maken.
Hij concludeert dat hij er dan voor moet zorgen dat de lengte van de kortste en de langste zijde bij elkaar opgeteld precies 90 cm moet zijn.
Bovendien moet hij de lengte van de overblijvende zijde gelijk nemen aan de lengte van de langste zijde. Deze lengte noemt hij x (in cm). Zie de figuur hiernaast.



Voor het volume V (in cm^3) van een pakket met al deze eigenschappen geldt dan de volgende formule:

$V = 90x^2 - x^3$

8 Bereken met behulp van differentiëren het maximale volume van het pakket van meneer Veer.

In het algemeen noemen we de lengte van de kortste en de langste zijde bij elkaar opgeteld a. De lengte van de overblijvende zijde en de langste zijde zijn ook nu gelijk. Deze lengte noemen we weer x. Voor elke maat (Small, Medium, Large of Extra Large) is de formule voor het volume van een pakket met al deze eigenschappen van de vorm:

$V = ax^2 - x^3$

Hierbij is een formule voor het **maximale** volume te maken. Deze formule is:

$V_{max} = \frac{4}{27}a^3$

9 Toon de juistheid van de formule voor V_{max} aan.

Geluidshinder van verkeer

Langs drukke snelwegen

Het lawaai dat men ondervindt van het verkeer op een drukke snelweg blijkt vooral af te hangen van de afstand die men heeft tot de snelweg en van de snelheid van het verkeer op de snelweg.
Het lawaai is niet constant. Ook als een waarnemer op een vaste plek staat, wisselt het lawaai in de tijd voortdurend. Voor het vergelijken van situaties hanteert men daarom het gemiddelde lawaainiveau (L) voor een plek. Een hoge waarde van L kan reden zijn om een geluidswal te plaatsen bij een woonwijk. Bij drukke snelwegen gaat men uit van de formule:

$L = 89{,}5 - 4{,}3\ln(a \cdot v) + 0{,}16v - 0{,}03a$

met a de afstand in meters tot de snelweg en v de gemiddelde snelheid in km/uur van het verkeer op de snelweg.

Stel dat $v = 80$.

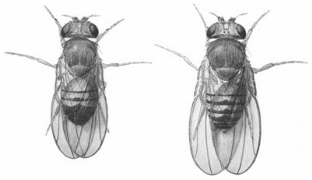
10 Toon met behulp van differentiëren aan dat volgens deze formule L afneemt als de afstand tot de snelweg groter wordt.

Bewoners van woningen dicht bij de snelweg ondervinden vooral veel overlast bij hoge en zeer lage gemiddelde snelheden van het verkeer.

Een woning staat op 100 meter afstand van de snelweg.

11 Toon met behulp van differentiëren aan dat er een gemiddelde snelheid van het verkeer is waarbij L minimaal is bij deze woning en bereken die gemiddelde snelheid.

Fruitvliegjes



Bij praktische opdrachten voor het vak biologie over kruisingen wordt vaak gebruik gemaakt van fruitvliegjes (Drosophila melanogaster). Deze fruitvliegjes zijn namelijk makkelijk te kweken en de ontwikkeling van ei tot fruitvliegje duurt maar negen dagen. Men kan dus in zeer korte tijd veel generaties kweken.

Het aantal fruitvliegjes neemt de eerste weken exponentieel toe. Bij een praktische opdracht tellen leerlingen uit 5vwo na 2 weken 140 fruitvliegjes en na 5 weken 1065 fruitvliegjes. Bij deze gegevens is een exponentiële formule te maken voor het aantal fruitvliegjes F na t weken.

12 Geef deze formule. Licht je antwoord toe.

In een kweekruimte kan het aantal fruitvliegjes niet onbeperkt toenemen. Het maximale aantal fruitvliegjes is afhankelijk van de grootte van de kweekruimte. Een ander experiment, dat werd gestart op 10 november 2011, werd in een kleinere kweekruimte uitgevoerd. Bij het vervolg van deze opgave gaan we uit van de volgende formule die het aantal fruitvliegjes bij dit experiment beschrijft:

$$F = \frac{340}{1 + 54e^{-0{,}24t}}$$

Hierbij is t de tijd in dagen na 10 november 2011 en F het aantal fruitvliegjes.

13 Welke aantallen fruitvliegjes zijn volgens bovenstaande formule in de kweekruimte mogelijk? Licht je antwoord toe.

Fruitvliegjes zijn met een beetje etherdamp gemakkelijk te verdoven waarna je ze kan tellen en met een loep bestuderen. Op de dag dat er de meeste fruitvliegjes bijkomen wil Boris ze verdoven.

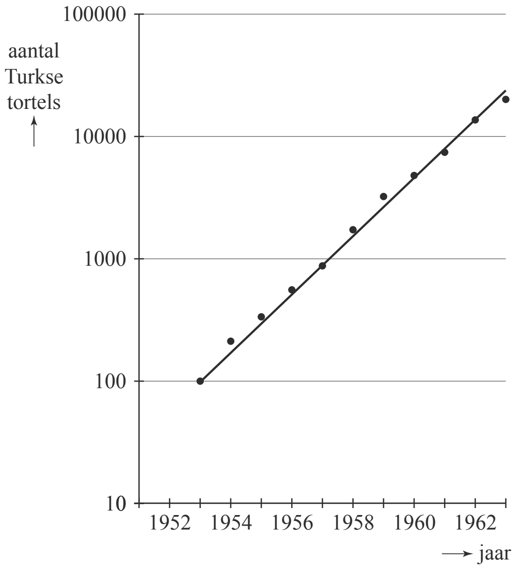
14 Toon aan dat de afgeleide van F gelijk is aan $F'(t) = \frac{4406{,}4e^{-0{,}24t}}{(1 + 54e^{-0{,}24t})^2}$ en bereken met behulp van deze afgeleide op welke datum er de meeste fruitvliegjes bijkomen.

Turkse tortels

Een Turkse tortel is een bepaald soort duif. Oorspronkelijk broedde de Turkse tortel alleen in Turkije, maar in de loop van de vorige eeuw heeft deze vogel zich over heel Europa verspreid. In 1950 werden ze voor het eerst in Nederland gezien.

In figuur 1 zie je de groei van het aantal Turkse tortels in Nederland gedurende de periode 1953 tot en met 1963.

figuur 1



Langs de verticale as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt.
De punten liggen bij benadering op een rechte lijn. Dat betekent dat het aantal Turkse tortels in de periode 1953 tot en met 1963 bij benadering exponentieel groeide.
Een formule voor het aantal Turkse tortels in Nederland gedurende deze jaren is:
$N(t) = 100 \cdot 1{,}73^t$ met t de tijd in jaren en $t = 0$ in 1953.

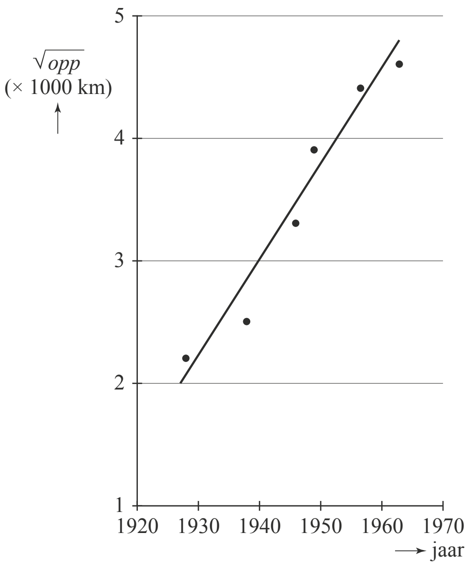
15 Toon met behulp van figuur 1 aan dat de formule $N(t) = 100 \cdot 1{,}73^t$ juist is.

Het aantal tortels groeide in de eerste jaren vrij langzaam. Pas na enige tijd was de groeisnelheid groter dan 1000 tortels per jaar.

16 Bereken met behulp van de afgeleide $N'(t)$ in welk jaar de groeisnelheid van het aantal Turkse tortels groter was dan 1000 tortels per jaar.

Het gebied waar een soort voorkomt, wordt het verspreidingsgebied genoemd.
Figuur 2 geeft informatie over de grootte van het verspreidingsgebied van de Turkse tortel.
Langs de verticale as staat de wortel van de oppervlakte ($\sqrt{opp}$) van het verspreidingsgebied.
In figuur 2 kun je bijvoorbeeld aflezen dat voor 1957 geldt: $\sqrt{opp} \approx 4400$ km.
Hiermee kan worden berekend dat de oppervlakte van het verspreidingsgebied in 1957 dus ruim 19 miljoen vierkante kilometer is.

figuur 2



We nemen aan dat het verspreidingsgebied cirkelvormig is, met straal r in km.
Voor de oppervlakte van het gebied geldt dan: $opp = \pi \cdot r^2$.

Hieruit volgt: $r = \dfrac{\sqrt{opp}}{\sqrt{\pi}}$.

In figuur 2 is te zien dat $\sqrt{opp}$ uitgezet tegen de tijd bij benadering een rechte lijn oplevert. Dit betekent dat in de periode 1930 tot en met 1960 de gemiddelde toename per jaar van de straal van het gebied constant is.

17 Bereken met behulp van de rechte lijn in figuur 2 de gemiddelde toename in km per jaar van de straal van het verspreidingsgebied in de periode 1930 tot en met 1960.

Een ander model waarmee de groei van de straal kan worden berekend, wordt beschreven met de volgende formule:

$$s = \frac{290}{m}\sqrt{\log(V)}$$

s is de groei van de straal in km per jaar;
V is het gemiddeld aantal vrouwelijke nakomelingen dat een wijfje gedurende haar hele leven voortbrengt, $V \geq 1$;
m is de gemiddelde leeftijd in jaren waarop een vrouwtje jongen krijgt, $m > 0$.

Voor de Turkse tortel heeft men in een bepaalde periode de volgende waarden gevonden: $m = 1{,}81$ en $V = 1{,}33$.
Neem aan dat door ongunstige omstandigheden voor de Turkse tortel de waarde van V met 10% afneemt, maar dat m gelijk blijft.

18 Bereken met hoeveel procent de waarde van s zal afnemen als gevolg van de afname van V.

©ThiemeMeulenhoff

We bekijken de volgende twee situaties:
1 De gemiddelde leeftijd waarop een vrouwtje jongen krijgt neemt toe, maar het gemiddeld aantal vrouwelijke nakomelingen verandert niet.
2 Het gemiddeld aantal vrouwelijke nakomelingen wordt groter, maar de gemiddelde leeftijd waarop een vrouwtje jongen krijgt verandert niet.

19 Beredeneer met behulp van de formule voor elk van deze twee situaties of de groei van de straal groter of kleiner zal worden.

Onnodig ingewikkeld?

Een gezonde volwassene is 's morgens langer dan aan het einde van de dag.
De Australische wetenschapper D. Burgess heeft dit verschijnsel onderzocht en publiceerde in 1999 de volgende formule voor de lengtefractie S:

$$S = \ln(-0{,}00216t + 2{,}7183)$$

Hierin is t het aantal uren nadat een persoon is opgestaan en S de verhouding tussen de lengte L van die persoon en van zijn lengte L_0 bij het opstaan.

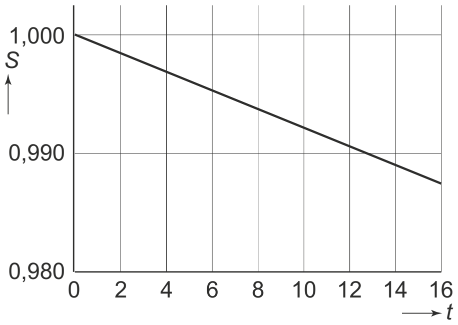
Dus $S = \dfrac{L}{L_0}$

Meneer Jansen heeft als hij uit bed komt een lengte van 170,0 cm.

20 Bereken na hoeveel tijd meneer Jansen volgens de formule 2,0 cm korter is geworden. Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

We gaan er in het vervolg van de opgave van uit dat een persoon na het opstaan 16 uur actief is, dus na 16 uur weer gaat slapen.

In de figuur hiernaast is de grafiek van S als functie van t getekend. Deze grafiek lijkt zo op het eerste gezicht een rechte lijn, maar door de formule weten wij dat dit niet zo is.



21 Stel de formule voor de afgeleide van S op en toon met behulp van deze afgeleide aan dat er bij S voor $0 \leq t \leq 16$ sprake is van daling. Onderzoek vervolgens of het hier om toenemende of afnemende daling gaat.

De grafiek van S valt nagenoeg samen met de rechte lijn door de punten (0; 1,0000) en (16; 0,9872). Is de formule van S met de natuurlijke logaritme, zoals gepubliceerd door de Australische wetenschapper, niet onnodig ingewikkeld? We zouden voor S ook gewoon een lineaire functie van t kunnen nemen.
We vergelijken daarom de formule $S = \ln(-0{,}00216t + 2{,}7183)$ met de formule $S = -0{,}0008t + 1{,}0000$ die hoort bij de rechte lijn door de punten (0; 1,0000) en (16; 0,9872). Om de twee formules met elkaar te vergelijken, wordt de verschilformule $V = \ln(-0{,}00216t + 2{,}7183) - (-0{,}0008t + 1{,}0000)$ opgesteld.

We nemen weer meneer Jansen, met een lengte van 170,0 cm bij het opstaan, als voorbeeld. Met behulp van V kun je op elk tijdstip t (met $0 \leq t \leq 16$) het verschil tussen de uitkomsten van beide formules bekijken.

22 Bereken de maximale waarde van dit verschil.

©ThiemeMeulenhoff

Hints bij hoofdstuk 7

1 De gegeven formule moet 1172 punten opleveren. Los de vergelijking algebraïsch of met de rekenmachine op.

2 Sneller dan 100 m horden in 0 seconden kan niet.

3 Differentiëren met de kettingregel.

4 Gebruik de quotiëntregel. Stel de afgeleide gelijk aan 0.

5 *t* is positief. Hoe ontwikkelen de beide formules zich als *t* heel groot wordt?

6 Differentieer C_2 met de kettingregel. Zoek het maximum van C_2 door het nulpunt van de afgeleide te bepalen. Dit mag met de hulp van de rekenmachine.

7 Bepaal maat en zone en lees de prijs bij DPD in de tabel af.

8 Bereken het nulpunt van de afgeleide.

9 Herhaal de berekening van de vorige vraag, maar nu met een parameter *a* er in.

10 $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
Differentiëren met de kettingregel. Leg uit wat er met de afgeleide gebeurt als *a* stijgt.

11 Differentiëren met de kettingregel. Stel de afgeleide gelijk aan 0 om het minimum te vinden.

12 Uit de gegevens volgt de groeifactor per drie weken.

13 Met $F(0)$ bereken je de beginhoeveelheid. Bedenk wat er met $e^{-0{,}24t}$ gebeurt als *t* heel groot wordt.

14 Differentiëren met de quotiëntregel en de kettingregel. Of eerst herschrijven met een exponent –1 en dan alleen de kettingregel.

15 Lees twee punten af om de groeifactor te bepalen.

16 Differentieer met de regel $f(x) = g^x \Rightarrow f'(x) = \ln(g) \cdot g^x$. Zoek in een tabel van de afgeleide naar de waarde 1000.

17 Lees de coördinaten van twee punten op de rechte lijn af en bereken bij elk punt de straal van het verspreidingsgebied.

18 Bereken *s* in de oude en de nieuwe situatie.

19 Wat gebeurt er met een breuk als de noemer groter wordt?

20 Vul $L = 168$ en $L_0 = 170$ in en los de vergelijking op met de rekenmachine.

21 $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ en de kettingregel.

22 Bereken het maximum van *V* met de rekenmachine en leg uit wat dit resultaat betekent voor meneer Jansen.

©ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij hoofdstuk 7

Zevenkamp

1 Joyner behaalde 1172 punten op de 100 m horden $\Rightarrow$ $1172 = 9{,}23076 \cdot (26{,}7 - X)^{1{,}835}$
Voer in de rekenmachine in $y_1 = 9{,}23076 \cdot (26{,}7 - x)^{1{,}835}$ en $y_2 = 1172$.

Met *intersect/snijpunt* vind je de oplossing $x = 12{,}6904...$
Afgerond op twee decimalen: $x \approx 12{,}69$ seconden.
andere manier
De vergelijking kan ook algebraïsch worden opgelost.

$$1172 = 9{,}23076 \cdot (26{,}7 - X)^{1{,}835} \Leftrightarrow \frac{1172}{9{,}23076} = (26{,}7 - X)^{1{,}835} \Leftrightarrow \left(\frac{1172}{9{,}23076}\right)^{\frac{1}{1{,}835}} = 26{,}7 - X$$

dus $X = 26{,}7 - \left(\frac{1172}{9{,}23076}\right)^{\frac{1}{1{,}835}} = 12{,}6904...$

Afgerond op twee decimalen: $X \approx 12{,}69$ seconden.

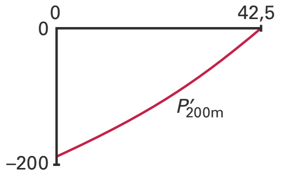
2 De grafiek van $P_{100m} = 9{,}23076 \cdot (26{,}7 - X)^{1{,}835}$ is dalend, dus de hoogste waarde wordt bereikt als $x = 0 \Rightarrow P_{100m}(0) = 9{,}23076 \cdot (26{,}7 - 0)^{1{,}835} = 3827{,}239$ dus P_{100m} is maximaal 3827 punten.
Voor verspringen geldt de formule $P_{ver} = 0{,}188807 \cdot (X - 210)^{1{,}41}$ waarbij *X* in cm.
Met verspringen behaal je 3827 punten als geldt:

$$3827 = 0{,}188807 \cdot (X - 210)^{1{,}41} \Leftrightarrow \frac{3827}{0{,}188807} = (X - 210)^{1{,}41} \Leftrightarrow 20\,269{,}3... = (X - 210)^{1{,}41}$$

$$\Leftrightarrow X - 210 = (20\,269{,}3...)^{\frac{1}{1{,}41}} \Leftrightarrow X = 210 + 1133{,}6... = 1343{,}6... \text{ cm.}$$

Een atlete zal ten minste 13,44 meter ver moeten springen om 3827 punten te behalen.

3 Voor de 200 meter hardlopen geldt de formule $P_{200m}(X) = 4{,}99087 \cdot (42{,}5 - X)^{1{,}81}$ waarin *X* in seconden.
Differentiëren met de kettingregel: $P'_{200m}(X) = 4{,}99087 \cdot 1{,}81 \cdot (42{,}5 - X)^{0{,}81} \cdot (-1) \Rightarrow$
$P'_{200m}(X) = -9{,}0334747 \cdot (42{,}5 - X)^{0{,}81}$
Op het domein [0; 42,5] ziet de grafiek van de afgeleide $P'_{200m}(X)$ er uit zoals hieronder.
$P'_{200m}(X)$ is voor elke waarde in [0; 42,5> negatief, dus de grafiek van P_{200m} daalt.



$P'_{200m}(X)$ stijgt naar nul, dus de grafiek van P_{200m} daalt steeds minder snel.
De grafiek van P_{200m} is dus afnemend dalend.
Omdat $P_{200m}(42{,}5) = 0$ en $P'_{200m}(X) = 0$ raakt de grafiek van $P_{200m}(X)$ de X-as voor $X = 42{,}5$.

©ThiemeMeulenhoff

Hooikoorts

4 De formule $C_1(t)$ kan worden gedifferentieerd met de quotiëntregel.

$$C_1(t) = \frac{16t}{190t^2+60} \Rightarrow$$

$$C_1'(t) = \frac{(190t^2+60)\cdot 16 - 16t\cdot 380t}{(190t^2+60)^2} = \frac{3040t^2+960-6080t^2}{(190t^2+60)^2} = \frac{-3040t^2+960}{(190t^2+60)^2}$$

dus $C_1'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-3040t^2+960}{(190t^2+60)^2} = 0 \Leftrightarrow -3040t^2+960 = 0 \Leftrightarrow t^2 = \frac{960}{3040}$

$t = \sqrt{\frac{960}{3040}} = 0{,}56195...$ uur dus $60 \cdot 0{,}56195... \approx 34$ minuten.

De vergelijking $\frac{-3040t^2+960}{(190t^2+60)^2} = 0$ mag ook met de rekenmachine (zero/nulpunt) worden opgelost.

Na ongeveer 34 minuten is de concentratie van de werkzame stof maximaal.

5 • $C_1(t) = \frac{16t}{190t^2+60}$

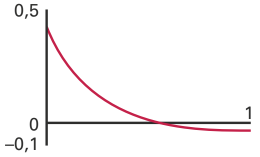
De teller $16t$ is positief en stijgt lineair.
De noemer $190t^2 + 60$ is positief en stijgt kwadratisch.

De noemer stijgt veel sneller dan de teller dus de breuk $\frac{16t}{190t^2+60}$ daalt naar nul.

• $C_2(t) = 0{,}13(e^{-0{,}65t} - e^{-3{,}9t})$

Zowel $e^{-0{,}65t}$ als $e^{-3{,}9t}$ zijn e-machten met een negatieve exponent en die dalen naar nul als t groot wordt. Dan daalt ook $0{,}13(e^{-0{,}65t} - e^{-3{,}9t})$ naar nul.
Beide formules dalen na verloop van tijd naar nul en dan is de werkzame stof nagenoeg uit het bloed verdwenen.

6 $C_2(t) = 0{,}13(e^{-0{,}65t} - e^{-3{,}9t})$ differentiëren met de kettingregel:
$C_2'(t) = 0{,}13(-0{,}65 \cdot e^{-0{,}65t} + 3{,}9 \cdot e^{-3{,}9t})$
Voer de afgeleide functie in de rekenmachine in: $y_1 = 0{,}13(-0{,}65 \cdot e^{-0{,}65x} + 3{,}9 \cdot e^{-3{,}9x})$.

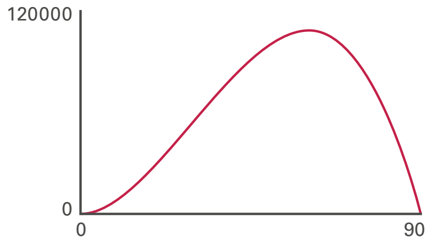


De optie *zero/nulpunt* geeft als nulpunt $x = 0{,}551...$ dus het maximum van C_2 wordt bereikt na ongeveer 0,55 uur en dat is eerder dan het maximum van C_1 (dat na ongeveer 0,56 uur wordt bereikt; zie voorvorige vraag).

Pakketshop

7 De lengte van de kortste en de langste zijde bij elkaar opgeteld is 31 + 86 = 117 cm, dus de maat is Extra Large.
Hongarije behoort tot Zone 3 dus het versturen van het pakket van Maartje kost bij DPD Pakketshop 40 euro. Dat is 3,97 euro goedkoper dan bij het postkantoor.
$\frac{3{,}97}{43{,}97} \cdot 100 \approx 9{,}03\%$ dus voor Maartje is DPD Pakketshop ongeveer 9% goedkoper.

8 De formule $V = 90x^2 - x^3$ differentiëren geeft $V' = 180x - 3x^2$.
Het maximum van V wordt bereikt als $V' = 0 \Leftrightarrow$
$180x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow 3x(60 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $x = 60$



Uit een plot van $V = 90x^2 - x^3$ volgt dat het maximum bij $x = 60$ ligt.
Het maximale volume is $V(60) = 90 \cdot 60^2 - 60^3 = 108\,000$ cm^3.
Bij $x = 0$ vind je het minimum $V(0) = 0$ cm^3, maar een doos hierbij bestaat niet.

9 De functie $V = ax^2 - x^3$ differentiëren geeft $V' = 2ax - 3x^2$.
$V' = 0 \Leftrightarrow 2ax - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2a - 3x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ of $3x = 2a \Leftrightarrow x = 0$ of $x = \frac{2}{3}a$
Het maximum ligt bij $x = \frac{2}{3}a$ dus het maximale volume is:

$$V_{max} = V(\tfrac{2}{3}a) = a \cdot \left(\tfrac{2}{3}a\right)^2 - \left(\tfrac{2}{3}a\right)^3 = a \cdot \tfrac{4}{9}a^2 - \tfrac{8}{27}a^3 = \tfrac{4}{9}a^3 - \tfrac{8}{27}a^3 = \tfrac{12}{27}a^3 - \tfrac{8}{27}a^3 = \tfrac{4}{27}a^3$$

Geluidshinder van verkeer

10 $v = 80$ invullen geeft: $L = 89{,}5 - 4{,}3\ln(80a) + 12{,}8 - 0{,}03a$

Differentiëren met de kettingregel: $\frac{dL}{da} = -4{,}3 \cdot \frac{1}{80a} \cdot 80 - 0{,}03 = \frac{-4{,}3}{a} - 0{,}03$

Omdat a positief is, is $\frac{dL}{da} < 0$ voor elke a dus als a toeneemt, neemt L af.

11 $a = 100$ invullen geeft: $L = 89{,}5 - 4{,}3\ln(100v) + 0{,}16v - 3$

Differentiëren met de kettingregel: $\frac{dL}{dv} = -4{,}3 \cdot \frac{1}{100v} \cdot 100 + 0{,}16 = \frac{-4{,}3}{v} + 0{,}16$.

L is minimaal als $\frac{dL}{dv} = 0 \Leftrightarrow \frac{-4{,}3}{v} + 0{,}16 = 0 \Leftrightarrow \frac{4{,}3}{v} = 0{,}16 \Leftrightarrow v = \frac{4{,}3}{0{,}16} = 26{,}875$

Bij een gemiddelde snelheid van ongeveer 27 km/uur is het lawaainiveau voor deze woning minimaal.

Fruitvliegjes

12 Het aantal fruitvliegjes groeit exponentieel. Voor drie weken is de groeifactor $\frac{1065}{140}$

dus de groeifactor per week is $\left(\frac{1065}{140}\right)^{\frac{1}{3}} = 1{,}9667...$

Op tijdstip $t = 0$ was het aantal fruitvliegjes $\frac{140}{(1{,}9667...)^2} = 36{,}19...$ dus het experiment startte met 36 fruitvliegjes.
De formule voor het aantal fruitvliegjes is $F = 36 \cdot 1{,}97^t$.

13 Op $t = 0$ zijn er $F(0) = \frac{340}{1 + 54e^{-0{,}24 \cdot 0}} = \frac{340}{1 + 54} \approx 6$ fruitvliegjes.

Als t groter wordt, zal $e^{-0{,}24t}$ dalen naar nul. Dan zal ook $54e^{-0{,}24t}$ dalen naar nul, dus de breuk stijgt uiteindelijk naar $\frac{340}{1+0} = 340$ als t heel groot wordt.
Het aantal fruitvliegjes in de kweekruimte kan volgens de gegeven formule liggen tussen 6 en 340.

14 $F(t) = \frac{340}{1 + 54e^{-0{,}24t}}$ differentiëren met de quotiëntregel.

$$F'(t) = \frac{(1 + 54e^{-0{,}24t}) \cdot 0 - 340 \cdot 54 \cdot e^{-0{,}24t} \cdot (-0{,}24)}{(1 + 54e^{-0{,}24t})^2} = \frac{4406{,}4 \cdot e^{-0{,}24t}}{(1 + 54e^{-0{,}24t})^2}$$

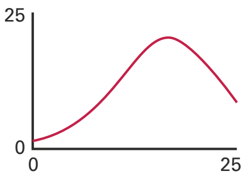
andere manier om F te differentiëren

$F(t) = \frac{340}{1 + 54e^{-0{,}24t}} = 340 \cdot (1 + 54e^{-0{,}24t})^{-1}$ en differentiëren met de kettingregel:

$$F'(t) = 340 \cdot (-1) \cdot (1 + 54e^{-0{,}24t})^{-2} \cdot 54e^{-0{,}24t} \cdot (-0{,}24) = -340 \cdot \frac{1}{(1 + 54e^{-0{,}24t})^2} \cdot -12{,}96e^{-0{,}24t} =$$

$$\frac{-340 \cdot -12{,}96e^{-0{,}24t}}{(1 + 54e^{-0{,}24t})^2} = \frac{4406{,}4 \cdot e^{-0{,}24t}}{(1 + 54e^{-0{,}24t})^2}$$

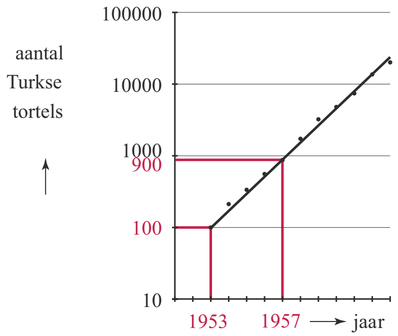
Er komen de meeste fruitvliegjes bij als de helling van F maximaal is, dus als F' een maximum heeft.
Voer in de rekenmachine in $y_1 = \frac{4406{,}4 \cdot e^{-0{,}24x}}{(1 + 54e^{-0{,}24x})^2}$ en bereken met behulp van de optie *maximum* het tijdstip waarop het maximum plaats vindt.



De rekenmachine geeft $x = 16{,}6...$ dus op de 17e dag na 10 november 2011 kwamen er de meeste fruitvliegjes bij. Dat was op 26 of 27 november 2011.
Het antwoord hangt af van het precieze tijdstip van t = 0 op 10 november 2011. Als het experiment start om 0:00 uur, dan is het juiste antwoord 26 november, maar als het experiment 's middags is opgestart, is het juiste antwoord 27 november.

Turkse tortels

15 Afgelezen in de figuur: in 1953 waren er 100 Turkse tortels in Nederland en in 1957 waren er ongeveer 900.



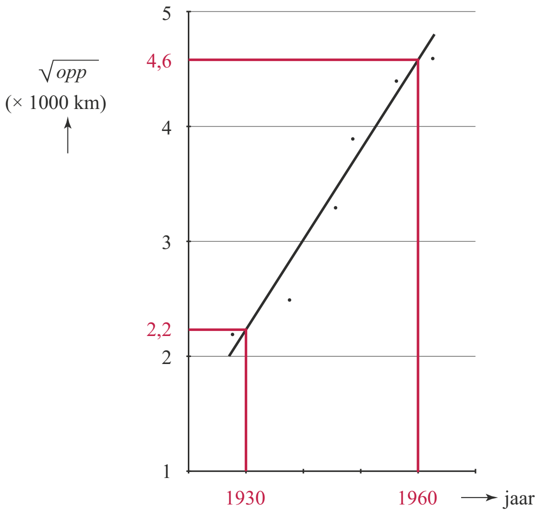
In de vier jaren van 1953 tot 1957 is het aantal gegroeid met factor 9, dus de groeifactor per jaar is $9^{\frac{1}{4}} = 1{,}732...$
De beginwaarde op $t = 0$ (in 1953) is 100 en de groeifactor is ongeveer 1,73 dus de formule $N(t) = 100 \cdot 1{,}73^t$ is juist.

16 $N(t) = 100 \cdot 1{,}73^t \Rightarrow N'(t) = 100 \cdot \ln(1{,}73) \cdot 1{,}73^t$
Voer in de rekenmachine $y_1 = 100 \cdot \ln(1{,}73) \cdot 1{,}73^x$.
De rekenmachine geeft de volgende tabel:

t	$N'(t)$
4	490,98
5	849,39
6	1469,4

In het 6e jaar na 1953 is de groeisnelheid voor het eerst boven de 1000 tortels per jaar. Dat is in 1959.
andere manier
Voer in de rekenmachine $y_1 = 100 \cdot \ln(1{,}73) \cdot 1{,}73^x$ en $y_2 = 1000$.
De optie *intersect/snijpunt* geeft $x \approx 5{,}3$ jaar
5,3 jaar na 1953 is de groeisnelheid voor het eerst boven 1000 tortels per jaar.
Dat is in 1958.
In figuur 1 geven de stippen jaarcijfers weer, dus de eerste aanpak ligt meer voor de hand.

17 Twee punten aflezen op de rechte lijn in de figuur.



In 1930 : $\sqrt{opp} \approx 2{,}2 \cdot 1000 = 2200$ km $\Rightarrow r \approx \frac{2200}{\sqrt{\pi}} \approx 1241$ km

In 1960 : $\sqrt{opp} \approx 4{,}6 \cdot 1000 = 4600$ km $\Rightarrow r \approx \frac{4600}{\sqrt{\pi}} \approx 2595$ km

De gemiddelde toename van de straal in de periode 1930 tot en met 1960 is $\frac{2595-1241}{30} \approx 45{,}1$ dus ongeveer 45 kilometer per jaar.

18 Oude situatie: $m = 1{,}81$ en $V = 1{,}33$ dus $s = \frac{290}{1{,}81}\sqrt{\log(1{,}33)} \approx 56{,}39$ km per jaar.
Nieuwe situatie: V is 10% afgenomen dus $V = 0{,}9 \cdot 1{,}33 = 1{,}197$ terwijl $m = 1{,}81$

en dus $s = \frac{290}{1{,}81}\sqrt{\log(1{,}197)} = 44{,}77$ km per jaar.
Het verschil is 56,39 – 44,77 = 11,62 km per jaar, dus de afname is $\frac{11{,}62}{56{,}39} \cdot 100 \approx 20{,}6\%$.

19 *Situatie 1:*
V verandert niet en m neemt toe.
Als m toeneemt, wordt de breuk $\frac{290}{m}$ kleiner. V verandert niet dus $\sqrt{\log(V)}$ blijft gelijk, dus s (de groei van de straal) wordt kleiner.
Situatie 2:
V wordt groter en m verandert niet.
m verandert niet dus $\frac{290}{m}$ blijft gelijk. V wordt groter dus ook $\sqrt{\log(V)}$ wordt groter.
Dan wordt s (de groei van de straal) groter.

©ThiemeMeulenhoff

Onnodig ingewikkeld

20 Als meneer Jansen 2,0 cm korter is geworden, geldt:
$S = \frac{168{,}0}{170{,}0} = \ln(-0{,}00216t + 2{,}7183)$

Voer in de rekenmachine in $y_1 = \frac{168{,}0}{170{,}0}$ en $y_2 = \ln(-0{,}00216x + 2{,}7183)$.
Gebruik vensterinstellingen zoals in de figuur in de opgave.
De optie *intersect/snijpunt* geeft $x = 14{,}727...$ dus na 14,727... uur is meneer Jansen 2,0 cm korter geworden. En $60 \cdot 0{,}727... \approx 44$ dus dat is na 14 uur en 44 minuten.

21 $S = \ln(-0{,}00216t + 2{,}7183)$ differentiëren met de kettingregel:
$S' = \frac{1}{-0{,}00216t + 2{,}7183} \cdot -0{,}00216 = \frac{-0{,}00216}{2{,}7183 - 0{,}00216t}$
Als t stijgt van 0 naar 16 zal de noemer 2,7183 – 0,00216t kleiner worden, maar omdat de teller een negatieve constante is zal de uitkomst van de breuk sterker negatief worden.
De helling van de grafiek van S wordt sterker negatief, dus S daalt toenemend.

22 Voer in de rekenmachine in $y_1 = \ln(-0{,}00216x + 2{,}7183) - (-0{,}0008x + 1{,}0000)$ en bepaal met de optie *maximum* het maximum van V op het interval [0, 16].
Het maximale verschil is ongeveer $2{,}9551 \cdot 10^{-5}$.
Dit betekent voor meneer Jansen dat $2{,}9551 \cdot 10^{-5} \cdot 170 \approx 0{,}005$ cm het grootste verschil is tussen beide formules.

©ThiemeMeulenhoff

8 Onderzoeksopgaven

Elektriciteit

In november 2004 maakte energiebedrijf Essent de tarieven voor de levering van elektriciteit bekend voor het jaar 2005. Zie onderstaande tabel.

Elektriciteitstarieven 2005

	vaste kosten per jaar	laagtarief kWh-prijs	normaaltarief kWh-prijs
KeuzeTarief Budget	€ 0,00	€ 0,0520	€ 0,0970
KeuzeTarief Standaard	€ 17,85	€ 0,0419	€ 0,0749
KeuzeTarief Plus	€ 35,70	€ 0,0364	€ 0,0743

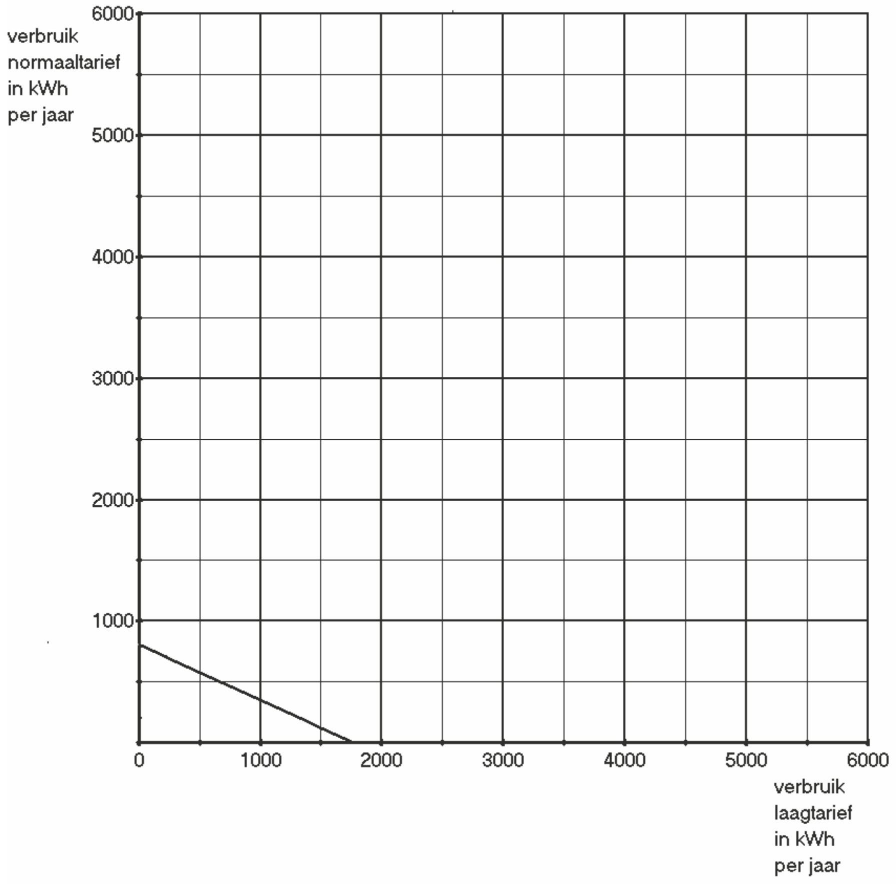
Zoals je kunt zien, kunnen klanten bij Essent kiezen uit drie tarieven.
Essent kent tarieven voor huishoudens die een elektriciteitsmeter gebruiken waarmee onderscheid wordt gemaakt tussen laagtarief en normaaltarief.
Het laagtarief wordt berekend voor elektriciteitsverbruik in het weekend en ‘s nachts van 23:00 tot 7:00 uur, het normaaltarief op de andere tijden.
Alle bedragen zijn inclusief BTW.
Een huishouden kan kiezen uit een van de drie tarieven. Afhankelijk van het verbruik en de momenten waarop verbruikt wordt, is voor het ene huishouden het ene keuzetarief het voordeligste en voor het andere huishouden het andere.

Een energieadviseur maakt een voorlichtingsfolder om daarbij met een figuur duidelijk te maken bij welke combinaties van laag- en normaaltariefverbruik (op jaarbasis) welk keuzetarief het voordeligst is. Hij wil daarin gebieden aangeven waar een bepaald tarief het voordeligst is. Hij gebruikt daarvoor het assenstelsel op de uitwerkbijlage. Hij heeft daarop al een lijnstuk getekend. Op dat lijnstuk liggen alle punten waarbij keuzetarief Budget en keuzetarief Standaard precies even duur zijn.

1 Geef in het assenstelsel op de uitwerkbijlage drie **gebieden** aan waarin telkens één van de drie keuzetarieven het voordeligst is. Licht je antwoord toe.

©ThiemeMeulenhoff

uitwerkbijlage bij vraag 1



©ThiemeMeulenhoff

Groenbelegging

Beleggingsmaatschappijen zoeken naar steeds nieuwe manieren om geld te beleggen.
Eén van die manieren is beleggen in bomen.
Over het beleggen in bomen schrijft een beleggingsmaatschappij in een reclamefolder het volgende:

Uw belegging groeit vanzelf.
De Labironia is een duurzame houtsoort. De houtindustrie maakt veel gebruik van de Labironia en het is te verwachten dat de vraag naar Labironia in de komende jaren zal toenemen. Van het geld dat u belegt, worden een stuk grond en jonge boompjes gekocht. Het stuk grond is verdeeld in percelen en op elk perceel worden 960 boompjes geplant.
Om een idee te krijgen van de te verwachten opbrengst, geven we u het volgende schema.

- Na 8 jaar moeten 200 bomen van elk perceel worden gekapt. Dan hebben de bomen naar verwachting een lengte van 7 m en een stamdiameter van 10,8 cm.
- Na 15 jaar moeten nog eens 300 bomen van elk perceel worden gekapt. Dan hebben de bomen naar verwachting een lengte van 12 m en een stamdiameter van 13 cm.
- De eindkap volgt na 20 jaar. Dan worden van elk perceel de resterende 460 bomen gekapt. De stamdiameter van de bomen is dan toegenomen tot 16 cm en de lengte tot 15,5 m.

De houtopbrengst wordt berekend met de formule $M = 0{,}16 \cdot D^2 \cdot L$. Hierin is M het aantal m^3 benutbaar hout, D de stamdiameter van de boom in meter en L de lengte van de boom in meter.

U kunt deelnemen door een bedrag in te leggen van 5000 euro per perceel. U ontvangt dan in de komende twintig jaar de opbrengst van het op dat perceel geoogste hout. Wanneer we ervan uitgaan dat de houtprijs, die voor de Labironia momenteel 600 euro per m^3 bedraagt, in de komende jaren niet zal stijgen, is deze belegging de moeite waard. Zelfs als U de gelden die na 8 jaar en na 15 jaar vrijkomen in een oude sok bewaart (en dus niet wegzet op bijvoorbeeld een spaarrekening), is de opbrengst in totaal meer dan wanneer U de inleg twintig jaar lang op een spaarrekening met 8% rente per jaar zou hebben gezet.

---

2 Onderzoek of deze laatste bewering klopt en bereken welk rentepercentage je op een spaarrekening zou moeten krijgen om na twintig jaar minstens een even hoge opbrengst te hebben als met deze groenbelegging.

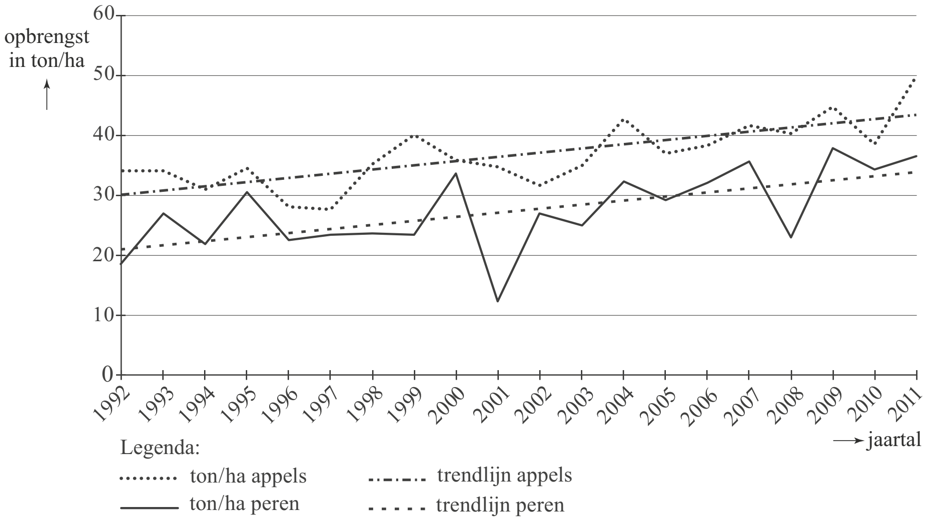
Topjaar voor appel en peer

In september 2011 meldde het CBS dat de verwachtingen voor de appeloogst en de perenoogst voor 2011 erg gunstig waren. Men verwachtte dat de totale opbrengst van de appelteelt in Nederland circa 400 miljoen kilogram zou zijn.
Voor de totale perenopbrengst hield men rekening met een slordige 300 miljoen kilogram.

In deze opgave houden we ons bezig met de opbrengst van beide fruitsoorten door de jaren heen. We gebruiken daarvoor twee aspecten: de gemiddelde opbrengst in ton (1000 kg) per hectare van een fruitsoort en de totale oppervlakte van de boomgaarden van een fruitsoort.

In onderstaande figuur, ook afkomstig van het CBS, zie je de opbrengst in ton per hectare voor ieder jaar vanaf 1992 tot en met 2011 weergegeven, zowel voor appels als peren.

Opbrengst appels en peren in ton per hectare



Uit de figuur blijkt dat de opbrengst per hectare van zowel appels als peren een stijgende trend vertoont. Deze trend zou je kunnen beschrijven met een lineair verband door een rechte lijn te trekken die de gegevens redelijk benadert. In de figuur zijn die trendlijnen getrokken voor de opbrengst van appels in ton per hectare en de opbrengst van peren in ton per hectare.

Hieronder een citaat uit een publicatie van het CBS:

Oppervlakte appelbomen in bijna 20 jaar meer dan gehalveerd
De oppervlakte appelbomen daalde in 2011 tot 8,4 duizend hectare en is nog maar twee procent groter dan de oppervlakte perenbomen. De oppervlakte perenbomen steeg in 2011 tot 8,2 duizend hectare. In 1992 was er nog 17 duizend hectare beplant met appelbomen. De oppervlakte perenbomen is in diezelfde periode met 50 procent toegenomen. Als de ontwikkeling van de afgelopen jaren doorzet, zal de oppervlakte perenbomen in Nederland in 2012 voor het eerst groter zijn dan de oppervlakte appelbomen.

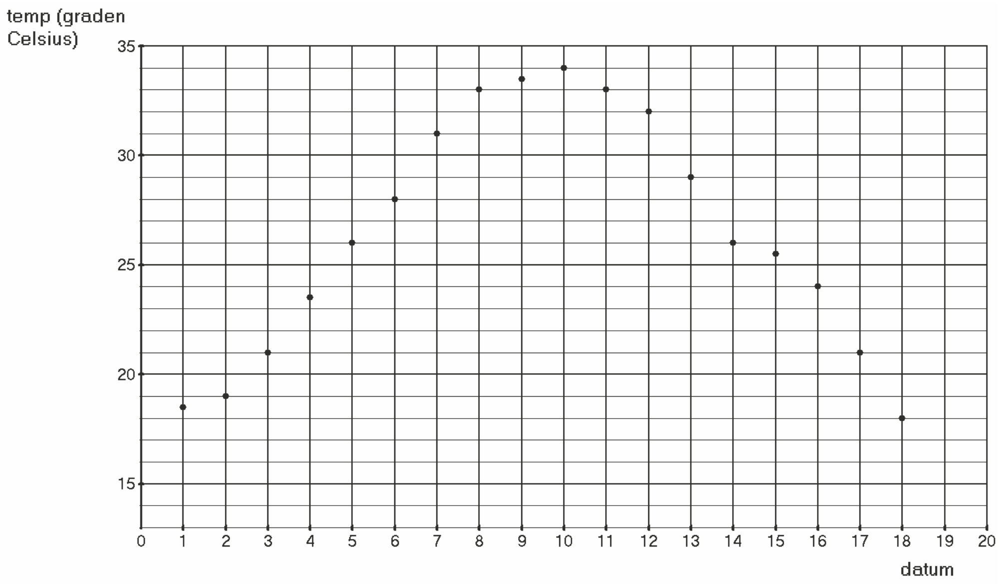
Uit dit citaat valt te concluderen dat de oppervlakte perenbomen stijgt terwijl die voor appelbomen daalt. Ook deze trends kun je lineair benaderen. De oppervlakte perenbomen is waarschijnlijk al in 2012 groter dan de oppervlakte appelbomen. Dat geldt niet voor de totale opbrengst. Het zal nog wel even duren voordat de totale opbrengst van peren groter is dan die van appels.

We gaan er in deze opgave van uit dat de trends alle vier lineair zijn.

3 Onderzoek, uitgaande van bovengenoemde trendmatige ontwikkelingen, in welk jaar de totale perenopbrengst voor het eerst groter zal zijn dan de totale appelopbrengst. Maak eventueel gebruik van de figuur.

Productie en temperatuur

Op een industrieterrein wordt elke dag de maximumtemperatuur gemeten.
In onderstaande grafiek zijn de meetresultaten voor juni 2010 weergegeven.



Een groot bedrijf op dit industrieterrein produceert materiaal. De productie van dit materiaal is afhankelijk van de buitentemperatuur. In onderstaande tabel kun je terugvinden hoeveel er per dag in diezelfde periode geproduceerd is (in tonnen).

dag	datum	productie	dag	datum	productie	dag	datum	productie
			ma	7 juni	1007	ma	14 juni	1012
di	1 juni	1032	di	8 juni	1004	di	15 juni	1017
wo	2 juni	1030	wo	9 juni	1002	wo	16 juni	1021
do	3 juni	1026	do	10 juni	1001	do	17 juni	1026
vr	4 juni	1022	vr	11 juni	1001	vr	18 juni	1029

Een medewerker van de afdeling planning wil het verband tussen de maximumtemperatuur T en de productie P bestuderen. Hij wil daarbij dit verband in een zo eenvoudig mogelijke en goed passende formule uitdrukken.

4 Stel een dergelijke formule op en licht je antwoord toe.

©ThiemeMeulenhoff

Kwartetten

Een supermarktketen houdt een actie: ‘Kwartetten’. Bij elke vijf euro aan boodschappen krijg je een kaart waarop één van de volgende zes producten staat afgebeeld: aardbeienijs, kauwgum, chocoladereep, frisdrank, chips of douchegel. Als je vier kaarten met hetzelfde product erop hebt, krijg je dat product als prijs.
Op sommige kaarten staat geen product, maar een hand met kaarten: dat is een joker. Je mag ook gebruik maken van een joker: in plaats van vier kaarten met hetzelfde product kun je ook drie kaarten met dat product en één joker gebruiken voor een prijs. Je mag maximaal één joker per kwartet gebruiken.

De eigenaar van de supermarktketen heeft er voor gezorgd dat 4% van alle kaarten een joker is. Verder zijn er van elk product evenveel kaarten gemaakt, dus 16% kaarten met aardbeienijs, 16% met kauwgum, enzovoort. De kaarten die de klanten krijgen, zijn willekeurig over de supermarkten verdeeld.

Er zijn 200 000 kaarten gedrukt.
De eigenaar van de supermarktketen probeert van tevoren in te schatten welke inkomsten hij door deze actie misloopt.

In de tabel staan de prijzen van de producten.

product	aardbeien-ijs	douche-gel	frisdrank	chocolade-reep	chips	kauwgum
prijs (in euro)	2,50	1,80	1,15	0,90	0,90	0,90

We gaan uit van de volgende denkbeeldige situatie: er zijn 10 000 klanten, die gemiddeld elk 20 kaarten krijgen tijdens de twee weken dat de actie duurt. Bij elke kaart is voor precies 5 euro aan boodschappen gedaan.

Door kaarten te ruilen of door samen te werken, kunnen klanten meer prijzen winnen tijdens deze actie. We nemen aan dat al deze klanten hun kaarten onderling ruilen of aan elkaar weggeven, zodat alle 200 000 kaarten gebruikt worden voor een kwartet. De klanten gebruiken de jokers bij het duurste product. Je mag maximaal één joker per kwartet gebruiken.
In de hierboven beschreven situatie heeft de eigenaar maximaal inkomstenverlies. Dit bedrag is een klein percentage van het bedrag dat de klanten hebben uitgegeven voor de kaarten.

5 Bereken dit percentage.

©ThiemeMeulenhoff

Vaatwasser

Martin heeft een nieuwe vaatwasser gekocht. Bij de aflevering vertelde de monteur het volgende:

"Ik gebruik thuis altijd het korte programma in plaats van het normale programma, want dat is goedkoper. Je moet de vaat dan wel even met de hand voorspoelen, dat kost je ongeveer 10 liter per keer en dat water wordt met gas verwarmd. In de vaatwasser wordt het water met elektriciteit verwarmd en dat is duurder. Gebruik daarom zoveel mogelijk het korte programma."

In de onderstaande tabel zie je enkele gegevens over het verbruik van de vaatwasser, afkomstig uit de handleiding.

programma	normaal programma	kort programma
programmaduur in minuten	155	60
vermogen in kW (kilowatt)	0,58	1,00
waterverbruik in liters	15	10

Behalve met gegevens uit deze tabel moet Martin rekening houden met de 10 liter water die hij volgens de monteur bij het voorspoelen moet gebruiken. Martin moet dus een schatting maken van de kosten aan water en het verwarmen daarvan bij het voorspoelen.

Martin heeft verder de volgende informatie verzameld:
- Water kost 1,22 euro per m^3.
- Gas kost 0,54 euro per m^3.
- De hoeveelheid energie die een apparaat met een vermogen van 1 kW in 1 uur verbruikt, noemen we 1 kWh (kilowattuur); een apparaat met een vermogen van 0,2 kW gebruikt in 0,5 uur dus $0,2 \cdot 0,5 = 0,10$ kWh.
- Elektriciteit kost 0,22 euro per kilowattuur (kWh).

Als Martin voorspoelt, gaan we ervan uit dat hij 1280 m^3 gas per jaar verbruikt. Driekwart daarvan gaat op aan verwarming. De rest wordt gebruikt voor het verwarmen van water voor het bad en de douche, het voorspoelen, enzovoort. Martin schat dat hij voor het met de hand voorspoelen circa 10% van die rest gaat gebruiken.

6 Onderzoek hoe groot het prijsverschil per vaatwasbeurt is tussen het normale programma en het korte programma met voorspoelen en geef met argumenten aan wat je vindt van de opmerking van de monteur.

Eerste Kamerverkiezingen

In Nederland worden de leden van de Eerste Kamer gekozen door de leden van de Provinciale Staten (PS). De leden (van de PS) stemmen in principe op hun eigen partij, maar het kan strategisch handig zijn om op een andere partij te stemmen.

Niet iedere provincie heeft evenveel zetels in de PS. De zetelverdeling van de PS (na de verkiezingen van 2 maart 2011) staat in de tabel hieronder. In de tabel kun je zien dat de PvdA in Groningen 12 zetels had behaald en dus 12 leden had in de PS van Groningen.

Afhankelijk van het aantal inwoners in de provincie krijgen de leden van de PS een stemwaarde bij de verkiezingen van de Eerste Kamer. In de laatste kolom van de tabel is te zien dat de stem van een Statenlid uit Groningen bij deze verkiezingen telde voor 135 punten. Dat betekent dat de partij waarop dit Statenlid stemt 135 punten krijgt door deze stem.

	aantallen zetels per partij															
provincie	PvdA	VVD	CDA	PVV	SP	D66	GL	CU	PvdD	50+	SGP	FNP	ONH	PvZ	PvhN	stemwaarde
Groningen	12	6	5	3	6	3	3	3	1						1	135
Fryslân	11	6	8	4	3	2	2	3				4				151
Drenthe	12	9	6	4	4	2	2	2								120
Overijssel	9	8	11	4	4	3	2	3		1	2					241
Flevoland	6	9	4	6	3	3	2	3	1	1	1					101
Gelderland	9	11	9	6	5	4	4	3	1	1	2					365
Utrecht	7	11	6	5	4	5	4	2	1	1	1					261
Noord-Holland	11	13	5	6	5	6	5	1	1	1			1			489
Zuid-Holland	10	12	6	8	5	5	3	2	1	1	2					641
Zeeland	7	7	6	5	3	2	1	2			4			2		98
Noord-Brabant	7	12	10	8	8	5	3		1	1						446
Limburg	6	8	10	10	6	2	3			2						239

We gaan er in deze opgave van uit dat een partij een zetel in de Eerste Kamer krijgt als er tenminste 2221 punten behaald worden.
De PvdD kon net een Eerste Kamerzetel behalen want
135 + 101 + 365 + 261 + 489 + 641 + 446 = 2438 en dat is meer dan de benodigde 2221 punten.

De partijen FNP, ONH, PvZ en PvhN gingen een samenwerkingsverband aan onder de naam OSF. Daarmee wilden zij een zetel behalen in de Eerste Kamer. Uit de tabel blijkt, dat dit niet zou lukken als alleen hun 8 Statenleden op de OSF-lijst zouden stemmen.
In de krant NRC van 7 maart 2011 stond een artikel over een 'deal van 50+ en OSF: tussen 50+ en de OSF is een afspraak in de maak die beide partijen een zetel in de Eerste Kamer moet opleveren. Gedacht wordt aan een constructie waar twee van de 50+-Statenleden op de OSF stemmen.'

Dat blijkt mogelijk, maar dan moet er ook een Statenlid van de OSF op de 50+-partij stemmen.

7 Laat zien dat het op die manier inderdaad mogelijk is om zowel de 50+-partij als de OSF een zetel in de Eerste Kamer te laten behalen.

Hints bij hoofdstuk 8

1 Stel formules op voor de totale kosten per jaar bij de tarieven Standaard en Plus. Stel deze formules aan elkaar gelijk en teken de bijbehorende lijn in het assenstelsel. Tenslotte van elk gebied vaststellen welk tarief daar het voordeligst is.

2 Bepaal de opbrengst na 8, 15 en 20 jaar van het perceel zowel in m^3 als in euro. Stel een exponentiele functie op voor de spaarrente met 8% rente per jaar. Pas de rente en dus de groeifactor zodanig aan dat na 20 jaar dezelfde opbrengst wordt bereikt als met een perceel bomen.

3 Lees in de figuur van beide trendlijnen twee punten af en stel lineaire formules op. Uit het citaat zijn voor beide trends twee punten af te leiden zodat ook voor deze trends lineaire formules kunnen worden opgesteld.
Totale opbrengst = oppervlakte in ha × opbrengst per ha.
Het snijpunt van de beide formules voor de totale opbrengst vind je met de rekenmachine.

4 Zet de temperatuur T en de productie P in een tabel en vervolgens in een grafiek. De punten lijken op een lijn te liggen. Lees twee punten van deze lijn af en stel een vergelijking op.

5 Zoek uit hoeveel kaarten er per product zijn en op welke wijze daarvan kwartetten kunnen worden gevormd.

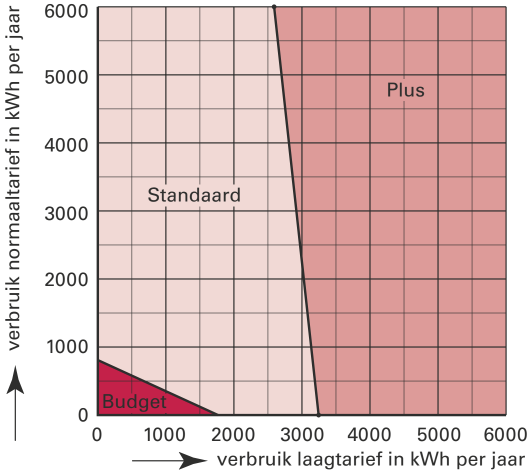
6 Een vaatwasbeurt met het normale programma heeft alleen elektriciteitskosten en waterkosten. Een vaatwasbeurt met het korte programma en voorspoelen heeft elektriciteitskosten en waterkosten voor de machine, maar ook nog gaskosten en nogmaals waterkosten voor het voorspelen.

7 Bereken hoeveel punten 50+ over heeft en hoeveel OSF te weinig heeft voor een zetel. Dan moet het aantal stemmen van 50+ naar OSF minus het aantal stemmen van OSF naar 50+ tussen deze twee waarden liggen.

Uitwerkingen bij hoofdstuk 8

Electriciteit

1 Het verbruik laagtarief in kWh per jaar noemen we l en verbruik normaaltarief in kWh per jaar noemen we n.
Een formule voor de totale kosten per jaar bij het KeuzeTarief Standaard is $TK_{Standaard} = 17{,}85 + 0{,}0419l + 0{,}0749n$ en een formule voor de totale kosten per jaar bij het KeuzeTarief Plus is $TK_{Plus} = 35{,}70 + 0{,}0364l + 0{,}0743n$.
$TK_{Standaard} = TK_{Plus} \Leftrightarrow 17{,}85 + 0{,}0419l + 0{,}0749n = 35{,}70 + 0{,}0364l + 0{,}0743n \Leftrightarrow$
$0{,}0055l + 0{,}0006n = 17{,}85 \Leftrightarrow 55l + 6n = 178\,500$.
Nu twee punten van de lijn $55l + 6n = 178\,500$ berekenen.
Uit $n = 0$ volgt $l = \frac{178\,500}{55} \approx 3245$ en dit geeft het punt (3245, 0).
Uit $n = 6000$ volgt $55l + 36\,000 = 178\,500$ dus $l = \frac{142\,500}{55} \approx 2591$ en dit geeft het punt (2591, 6000).



De getekende lijnen verdelen het assenstelsel in drie gebieden.
In en rond de oorsprong is het KeuzeTarief Budget het goedkoopst omdat er geen vaste kosten zijn, zoals bij de beide andere tarieven.

In bijvoorbeeld het punt (2000, 2000) geldt:
$TK_{Standaard} = 17{,}85 + 0{,}0419 \cdot 2000 + 0{,}0749 \cdot 2000 = 251{,}45$ euro.
$TK_{Plus} = 35{,}70 + 0{,}0364 \cdot 2000 + 0{,}0743 \cdot 2000 = 257{,}10$ euro.
In het gebied waarin (2000, 2000) ligt is het KeuzeTarief Standaard het goedkoopst.

In bijvoorbeeld het punt (5000, 5000) geldt:
$TK_{Standaard} = 17{,}85 + 0{,}0419 \cdot 5000 + 0{,}0749 \cdot 5000 = 601{,}85$ euro.
$TK_{Plus} = 35{,}70 + 0{,}0364 \cdot 5000 + 0{,}0743 \cdot 5000 = 589{,}20$ euro.
In het gebied waarin (5000, 5000) ligt is het KeuzeTarief Plus het goedkoopst.

Groenbelegging

2 • Na 8 jaar hebben de bomen lengte $L = 7$ meter en diameter $D = 0{,}108$ meter.
De houtopbrengst per boom is dan $M = 0{,}16 \cdot 0{,}108^2 \cdot 7 = 0{,}013\ldots$ m³.
Het totale volume van 200 bomen is $0{,}013\ldots \cdot 200 = 2{,}61\ldots$ m³ en dat levert $2{,}61\ldots \cdot 600 \approx 1568$ euro op.
• Na 15 jaar hebben de bomen lengte $L = 12$ meter en diameter $D = 0{,}13$ meter.
De houtopbrengst per boom is dan $M = 0{,}16 \cdot 0{,}13^2 \cdot 12 = 0{,}032\ldots$ m³.
Het totale volume van 300 bomen is $0{,}032\ldots \cdot 300 = 9{,}73\ldots$ m³ en dat levert $9{,}73\ldots \cdot 600 \approx 5841$ euro op.
• Na 20 jaar hebben de bomen lengte $L = 15{,}5$ meter en diameter $D = 0{,}16$ meter.
De houtopbrengst per boom is dan $M = 0{,}16 \cdot 0{,}16^2 \cdot 15{,}5 = 0{,}063\ldots$ m³.
Het totale volume van 460 bomen is $0{,}063\ldots \cdot 460 = 29{,}20\ldots$ m³ en dat levert $29{,}20\ldots \cdot 600 \approx 17\,523$ euro op.

De totale opbrengst van een perceel in 20 jaar is 1568 + 5841 + 17 523 = 24 932 euro.
Een spaarrekening met 8% rente per jaar brengt na 20 jaar $5000 \cdot 1{,}08^{20} \approx 23\,305$ euro op.
Een perceel bomen levert inderdaad een hogere opbrengst dan deze spaarrekening.

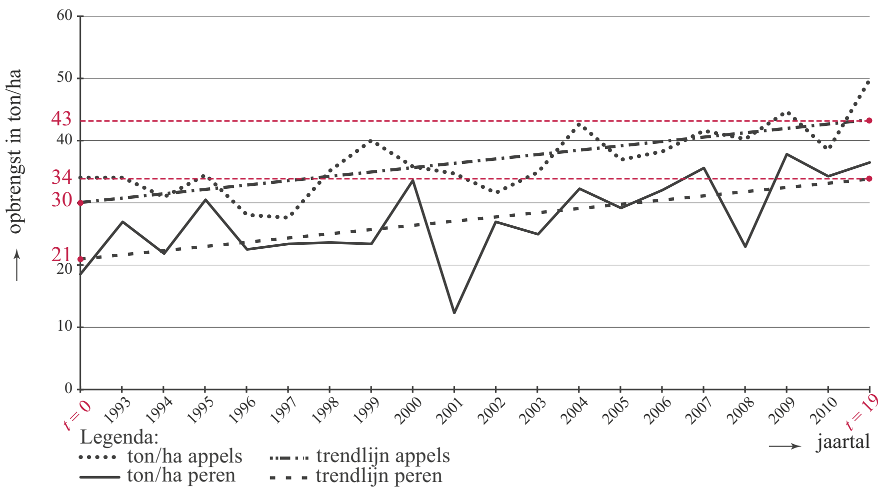
Een spaarrekening levert een even hoge opbrengst als een perceel bomen als geldt:

$$5000 \cdot g^{20} = 24\,932 \Leftrightarrow g^{20} = \frac{24\,932}{5000} \Leftrightarrow g = \sqrt[20]{\frac{24\,932}{5000}} = 1{,}08365\ldots$$

dus het rentepercentage moet dan 8,37% moeten zijn.

Topjaar voor appel en peer

3 Aflezen in de figuur.



Als we $t = 0$ in 1992 kiezen is $t = 19$ in 2011.
Op de trendlijn van de appels liggen de punten (0, 30) en (19, 43).

Van deze lijn is 30 het startgetal en $\frac{43-30}{19} \approx 0{,}68$ de helling.

Een vergelijking van de opbrengst van appels is $A(t) = 0{,}68t + 30$ met t in jaren vanaf 1992 en A in ton per hectare.

Op de trendlijn van de peren liggen de punten (0, 21) en (19, 34).

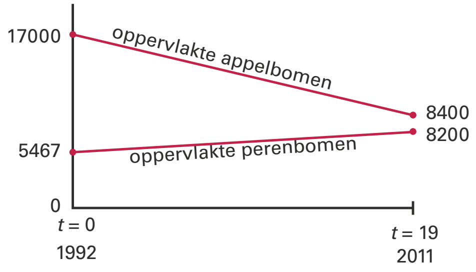
Van deze lijn is 21 het startgetal en $\frac{34-21}{19} \approx 0{,}68$ de helling.

Een vergelijking van de opbrengst van appels is $A(t) = 0{,}68t + 21$ met t in jaren vanaf 1992 en A in ton per hectare.

De oppervlakte appelbomen was in 1992 nog 17 000 hectare, maar in 2011 was dat nog maar 8400 hectare.
De oppervlakte perenbomen was in 2011 gegroeid tot 8200 hectare.
In de periode 1992 – 2011 was dat aantal met 50% gegroeid, dus met groeifactor 1,5.

In 1992 was de oppervlakte perenbomen $\frac{8200}{1{,}5} \approx 5467$ hectare.

In de grafiek levert dit de punten (0, 17 000) en (19, 8400) voor de oppervlakte appelbomen en (0, 5467) en (19, 8200) voor de oppervlakte perenbomen.



De trendlijn voor de oppervlakte van de appelbomen wordt:

$$B(t) = \left(\frac{8400 - 17\,000}{19}\right)t + 17\,000 \Rightarrow B(t) \approx -453t + 17\,000$$

De trendlijn voor de oppervlakte van de perenbomen wordt:

$$B(t) = \left(\frac{8200 - 5467}{19}\right)t + 5467 \Rightarrow B(t) \approx 144t + 5467$$

De totale opbrengst kan berekend worden met de formule $T = A \cdot B$ want
totale opbrengst = opbrengst per ha × oppervlakte in ha.
Dit geeft voor de appels $T(t) = (0{,}68t + 30) \cdot (-453t + 17\,000)$ en voor de peren $T(t) = (0{,}68t + 21) \cdot (144t + 5467)$.
Voer nu in de rekenmachine in $y_1 = (0{,}68x + 30) \cdot (-453x + 17\,000)$ en $y_2 = (0{,}68x + 21) \cdot (144x + 5467)$ en zoek in een tabel wanneer de totale perenopbrengst voor het eerst groter zal zijn dan die van de appel.

t	totale opbrengst appels	totale opbrengst peren
21	331 524	299 562
22	316 249	310 515
23	300 357	321 663
24	283 849	333 006

Dit gebeurt als $t = 23$ dus in het jaar 2015.

Productie en temperatuur

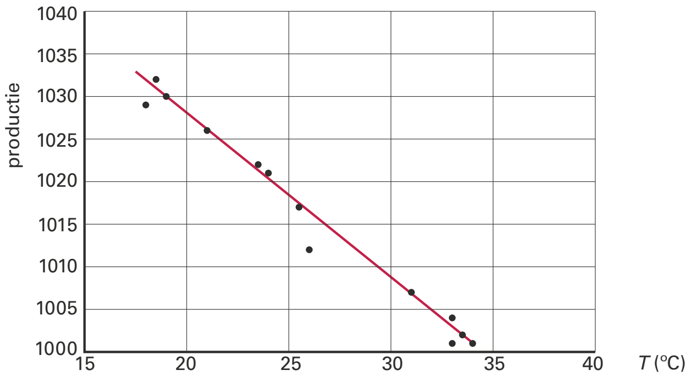
4 Temperatuur T aflezen uit de grafiek en koppelen aan de productie P van die dag:

datum	T (°C)	P
1 jun	18,5	1032
2 jun	19	1030
3 jun	21	1026
4 jun	23,5	1022

datum	T (°C)	P
7 jun	31	1007
8 jun	33	1004
9 jun	33,5	1002
10 jun	34	1001
11 jun	33	1001

datum	T (°C)	P
14 jun	26	1012
15 jun	25,5	1017
16 jun	24	1021
17 jun	21	1026
18 jun	18	1029

Om een idee te krijgen van het soort verband maken we een grafiek van T en P:



De punten liggen min of meer op een rechte lijn. Teken deze lijn en lees twee punten af om de formule van deze lijn op te stellen.

Aflezen: (34, 1001) en (19, 1030) dus de richtingscoëfficiënt is $\frac{1030-1001}{1019-1034} = \frac{29}{-15} \approx -1{,}9$.

Vul de coördinaten van (34, 1001) in in $P = -1{,}9T + b \Rightarrow 1001 = -1{,}9 \cdot 34 + b \Leftrightarrow b = 1065{,}6$.
Een mogelijke formule voor het verband tussen P en T is: $P = -1{,}9T + 1065{,}6$
Als de lijn een beetje anders wordt getekend, zal ook de formule iets anders uitpakken.
In de grafiek hierboven zijn maar 13 punten te zien, terwijl er 14 waarnemingen zijn.
Dat komt doordat het punt (21, 1026) tweemaal voorkomt.

Kwartetten

5 De klanten hebben voor elk van de 200 000 kaarten 5 euro uitgegeven, dus in totaal 1 000 000 euro.
Er zijn 8000 jokers, namelijk 4% van 200 000.
Van elk van de andere producten zijn er 32 000, namelijk 16% van 200 000.
De jokers worden gecombineerd met het duurste product: aardbeienijs.
De 8000 jokers gecombineerd met 24 000 aardbeienijskaarten geven samen 8000 kwartetten (elk bestaande uit 1 joker en 3 aardbeienijskaarten) die totaal $8000 \times 2{,}50 = 20\,000$ euro kosten.
Van de resterende 8000 aardbeienijskaarten kunnen nog 2000 kwartetten worden gevormd die samen $2000 \times 2{,}50 = 5000$ euro kosten.
Van elk van de andere producten kunnen van de 32 000 kaarten steeds 8000 kwartetten worden gevormd. Dit kost $8000 \times (1{,}80 + 1{,}15 + 0{,}90 + 0{,}90 + 0{,}90) = 45\,200$ euro.

Totaal inkomstenverlies voor de supermarktketen is 20 000 + 5000 + 45 200 = 70 200 euro.
De klanten hebben 1 000 000 euro uitgegeven voor de kaarten dus het inkomstenverlies is 7,02%.

Vaatwasser

6 1 m^3 = 1000 liter dus water kost 0,00122 euro per liter.

• *kosten normaal programma*

Energieverbruik is $\frac{155}{60} \cdot 0{,}58 = 1{,}498...$ kWh en dat kost $1{,}498... \cdot 0{,}22 = 0{,}3296...$ euro.

Waterverbruik is 15 liter en dat kost $15 \cdot 0{,}00122 = 0{,}0183$ euro.
Totale kosten vaatwasbeurt normaal programma $0{,}3296... + 0{,}0183 = 0{,}3479...$ euro, dus ongeveer 35 eurocent.

• *kosten kort programma met voorspoelen*
Energieverbruik vaatwasser is 1 kWh en dat kost 0,22 euro.
Waterverbruik vaatwasser is 10 liter en dat kost $10 \cdot 0{,}00122 = 0{,}0122$ euro.
Gasverbruik voorspoelen is 10% van een kwart van 1280 = $0{,}1 \cdot 0{,}25 \cdot 1280 = 32$ m^3 en dat kost $32 \cdot 0{,}54 = 17{,}28$ euro per jaar.

Een dagelijkse spoelbeurt kost dus $\frac{17{,}28}{365} = 0{,}04734...$ euro.

Waterverbruik voorspoelen is 10 liter en dat kost $10 \cdot 0{,}00122 = 0{,}0122$ euro per keer.
Totale kosten vaatwasbeurt kort programma met voorspoelen:
$0{,}22 + 0{,}0122 + 0{,}04734... + 0{,}0122 = 0{,}2917$ euro, dus ongeveer 29 eurocent

Een kort programma met voorspoelen is ongeveer 6 eurocent goedkoper dan het normale programma, dus de monteur heeft gelijk.

Eerste Kamerverkiezingen

7 De partij 50+ heeft negen zetels met een totale stemwaarde van $241 + 101 + 365 + 261 + 489 + 641 + 446 + 2 \cdot 239 = 3022$ punten. Omdat er 2221 punten nodig zijn voor een zetel kan deze partij 801 punten weggeven.
De vier partijen van OSF hebben samen acht zetels met een totale stemwaarde van $135 + 4 \cdot 151 + 489 + 2 \cdot 98 = 1424$ punten. Deze partij komt dus 797 punten tekort.
Twee 50+-Statenleden stemmen op OSF en één OSF-Statenlid stemt op 50+.
Dan moet het aantal stemmen van 50+ naar OSF minus het aantal stemmen van OSF naar 50+ ten minste 797 maar ten hoogste 801 zijn.
Ten minste 797 om OSF aan een zetel te helpen, en ten hoogste 801 omdat 50+ anders zijn enige zetel verliest.

Omdat OSF ten minste 98 punten teruggeeft, moet 50+ ten minste 797 + 98 = 895 punten aan OSF geven.
Hiervoor zijn vijf mogelijkheden: 641 + 365, 641 + 261, 641 + 489, 641 + 446 en 489 + 446.

aantal punten dat 50+ aan OSF geeft (≥ 895)	dan moet OSF aan 50+ teruggeven om tussen 797 en 801 uit te komen:		optie
	ten minste	ten hoogste	
641 + 365 = 1006	205	209	geen
641 + 261 = 902	101	105	geen
641 + 489 = 1130	329	333	geen
641 + 446 = 1087	286	290	geen
489 + 446 = 935	134	138	135

Er blijkt slechts één oplossing te zijn.
De 50+-Statenleden van Noord-Holland en Noord-Brabant geven hun 935 punten aan OSF. Het OSF-Statenlid van Groningen geeft zijn 135 punten aan 50+.
Na deze transactie krijgt de 50+-partij 3022 – 935 + 135 = 2222 punten en OSF krijgt 1424 + 935 – 135 = 2224 punten.
Beide partijen hebben dan genoeg punten voor een zetel.
Het is niet noodzakelijk om te bewijzen dat er slechts één oplossing is. Het is voldoende om deze te vinden.

©ThiemeMeulenhoff

Oefenen met hele examens, met hints om je op weg te helpen en uitleg bij de goede antwoorden.

Deel 2a Examens met uitwerkingen

Zonnepanelen[1)]

Veel mensen denken erover om zonnepanelen aan te schaffen. Bedrijven spelen daarop in en geven daar allerlei informatie over op hun websites. Op een dergelijke website tref je de volgende tekst aan:

Omdat de elektriciteitsprijs voortdurend stijgt, kan investeren in zonnepanelen interessant zijn. Laten we om te beginnen eens uitgaan van een stijging van de elektriciteitsprijs van 5% per jaar. Verder gaan we uit van een zonnepanelen-installatie met een opbrengst van 1750 kWh (kilowattuur) elektriciteit per jaar en een aanschafprijs van € 2995.

Verder wordt er op de website gerekend met een elektriciteitsprijs van € 0,225 per kWh voor het eerste jaar na de aanschaf van de zonnepanelen en vervolgens met een jaarlijkse toename van de elektriciteitsprijs van 5%.

Om de opbrengst in euro's te berekenen, wordt op diezelfde website gerekend met de prijs die de eigenaar van de zonnepanelen zou moeten betalen als hij de elektriciteit van een elektriciteitsbedrijf zou moeten kopen.

Met behulp van deze gegevens is het mogelijk een formule op te stellen van de vorm $Z = a \cdot b^{t-1}$ met Z de opbrengst in euro's van de zonnepanelen in jaar t. Hierbij is $t = 0$ het moment van aanschaf van zonnepanelen.

4p **1** Bereken de waarden van a en b in twee decimalen nauwkeurig.

noot 1 Deze gehele opgave is gebaseerd op gegevens zoals die in 2013 bekend waren.

Voor het vervolg van deze opgave gaan we niet meer uit van een jaarlijkse stijging van de elektriciteitsprijs maar van een vaste prijs van € 0,225 per kWh.
In onderstaande tabel zie je een overzicht van de prijs en opbrengst van verschillende zonnepaneelsystemen van een ander bedrijf.

aantal panelen	8	12	18
aanschafprijs van het systeem	€ 4699	€ 6299	€ 8599
verwachte elektriciteitsopbrengst (kWh per jaar)	1667	2500	3750

De overheidssubsidie[1)] van 15% van de aanschafprijs is nog niet verwerkt in de prijzen van de tabel. De overheidssubsidie bedraagt maximaal € 650.

De **terugverdientijd** is de periode die het duurt tot het aankoopbedrag van het systeem is terugverdiend via besparing op de elektriciteitskosten. In het begin van 2013 schafte iemand het systeem van 12 zonnepanelen aan met overheidssubsidie.

4p **2** Bereken, uitgaande van de verwachte elektriciteitsopbrengst, in welk jaar het aankoopbedrag volledig is terugverdiend.

Als je de panelen zelf installeert, is de aanschafprijs lager. De aanbieder rekent dan € 1300 vaste kosten voor het systeem en € 325 per paneel. De elektriciteitsopbrengst van de panelen verandert niet bij een doe-het-zelfsysteem. Als je 10 of meer panelen koopt, is de overheidssubsidie € 650. Voor T, de terugverdientijd in jaren, heeft de aanbieder de volgende formule opgesteld:

$$T = \frac{650 + 325x}{46{,}9x}$$

met x het aantal panelen dat aangeschaft wordt en $x \geq 10$.

4p **3** Beredeneer met behulp van de formule van de afgeleide van T voor $x \geq 10$ dat de terugverdientijd daalt als je meer panelen aanschaft.

Voor de aanschaf van 9 panelen of minder van een doe-het-zelfsysteem geldt een andere formule omdat de overheidssubsidie dan 15% van de aanschafprijs is. De aanschafprijs bestaat uit de vaste kosten plus de kosten per paneel.

4p **4** Stel een formule op voor de terugverdientijd T in jaren en x het aantal zonnepanelen voor $x \leq 9$.

Eén miljard hartslagen

Een veelgehoorde bewering is dat het hart van zoogdieren gedurende hun leven ongeveer een miljard keer slaat. We gaan dat in deze opgave onderzoeken.

Een zeker hondenras heeft een gemiddelde hartslag van 125 slagen per minuut. Met behulp van de bewering kun je dan de gemiddelde levensduur van dit ras berekenen.

2p **5** Bereken zo de gemiddelde levensduur in jaren van dit hondenras.

noot 2 In 2013 werd er door de overheid subsidie verstrekt bij het aanschaffen van zonnepanelen.

Naar aanleiding van deze bewering kan een formule voor het verband tussen de hartslag en de levensverwachting opgesteld worden:

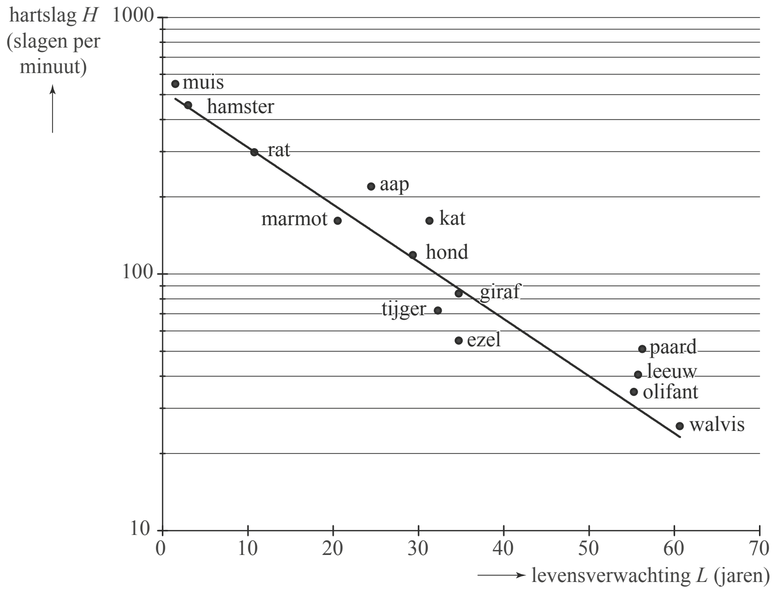
$$H = \frac{1900}{L}$$

Hier is L de levensverwachting (in jaren) en H de hartslag (in slagen per minuut).

4p **6** Toon aan dat deze formule uit de veelgehoorde bewering volgt.

4p **7** Stel de formule van de afgeleide van H op en beredeneer aan de hand van deze formule dat H afnemend dalend is.

Bij controle blijkt dat er dieren zijn waarvoor de formule ongeveer klopt, maar ook dieren waar de formule helemaal niet voor klopt, zoals de aap en de muis. In werkelijkheid is het verband anders. In de figuur is de hartslag van een aantal soorten zoogdieren uitgezet tegen hun levensverwachting. Langs de verticale as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt.



De punten die de hamster en de walvis weergeven, liggen nagenoeg op de getekende rechte lijn. De walvis heeft een levensverwachting van 60 jaar en een hartslag van 25 slagen per minuut. De hamster heeft een levensverwachting van 3 jaar en een hartslag van 450 slagen per minuut.

Het verband tussen H (de hartslag in slagen per minuut) en L (de levensverwachting in jaren) is (bij benadering) exponentieel en is dus te schrijven als:

$H = b \cdot g^L$

Uit de grafiek volgt dat b bij benadering 520 is en g bij benadering 0,95.

4p **8** Bereken met behulp van de gegevens van de hamster en de walvis g in drie decimalen en b in gehelen.

Met de formule $H = 520 \cdot 0{,}95^L$ kun je de hartslag berekenen als je de levensverwachting weet. Logischer is het om de levensverwachting te berekenen

als je van een zoogdier de hartslag gemeten hebt. Daarom willen we de formule $H = 520 \cdot 0{,}95^L$ herleiden tot de vorm:

$L = a \cdot \log(H) + b$

5p **9** Voer deze herleiding uit. Geef a en b in 2 decimalen nauwkeurig.

De formule van Riegel en kilometertijden

De marathonloper Pete Riegel ontwikkelde een eenvoudige formule om te voorspellen welke tijd een hardloper nodig zou hebben om een bepaalde afstand af te leggen op basis van zijn tijden op eerder gelopen afstanden. Die formule luidt als volgt:

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{1{,}07}$$

T_1 is de tijd, uitgedrukt in seconden, die gelopen is op de afstand d_1 en T_2 is de voorspelde tijd in seconden op de afstand d_2. De afstanden d_1 en d_2 zijn allebei in meters. De formule is geldig voor afstanden vanaf 1500 meter tot en met 42 195 meter, de marathon.

Harald loopt de 1500 meter in 4 minuten en 52 seconden.

3p **10** Bereken in minuten en seconden Haralds te verwachten tijd op de 10 000 meter.

Als je voor d_1 en d_2 de afstanden in een andere eenheid dan meters zou invullen, dan geeft de formule dezelfde uitkomst.

2p **11** Leg zonder getallenvoorbeeld uit waarom de uitkomst die de formule geeft inderdaad niet verandert als je de beide afstanden in kilometers in plaats van meters invult.

Het ligt voor de hand dat de gemiddelde snelheid lager wordt als de te lopen afstand groter wordt. Dat is ook in overeenstemming met de formule: als de afstand tweemaal zo groot wordt, dan geldt volgens de formule van Riegel dat de gemiddelde snelheid altijd met hetzelfde percentage afneemt.

5p **12** Bereken dit percentage.

Een andere maat voor de snelheid is de kilometertijd K, het aantal seconden dat een hardloper gemiddeld per kilometer nodig heeft. In formulevorm:

$$K = \frac{T}{d}$$

Hierbij is T de totale tijd in seconden en d de afstand in kilometers.

Als we naar de wereldrecords op de langere loopafstanden kijken, dan blijken de kilometertijden heel goed te voorspellen te zijn met de formule van Riegel. Dat is opmerkelijk want die afstanden werden door verschillende hardlopers gelopen.

Het wereldrecord op de 1500 meter is precies 3 minuten en 26 seconden[1)]. Uitgaande van dit wereldrecord kunnen de tijden voor de wereldrecords op de andere afstanden met behulp van de formule van Riegel berekend worden met $T = 206 \cdot \left(\frac{d}{1{,}5}\right)^{1{,}07}$. In deze formule is T de gelopen tijd in seconden voor het wereldrecord op de afstand d km.

noot 1 Dit record geldt sinds 1998. In deze opgave gaan we ervan uit dat dit record nog steeds geldt.

Met behulp van deze formule en de formule $K = \frac{T}{d}$ is het mogelijk een formule op te stellen voor de kilometertijden van de wereldrecords in de vorm:

$K = p \cdot d^q$

Hierbij is K de kilometertijd in seconden en d de afstand in kilometers.

4p **13** Bereken p en q in twee decimalen nauwkeurig.

Een variant van de formule van Riegel met een nog onbekende exponent a kan ook gebruikt worden bij schaatsen. Die formule ziet er dan als volgt uit:

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{a}$$ (met de tijden in seconden en de afstanden in meters)

Een schaatsliefhebster gebruikte eind 2015 de wereldrecords op de 5000 meter en de 10 000 meter om de waarde van de exponent a te berekenen.
Op de 5000 meter was eind 2015 het wereldrecord 6 minuten en 3,32 seconden. Het wereldrecord op de 10 000 meter was op dat moment 12 minuten en 36,30 seconden.

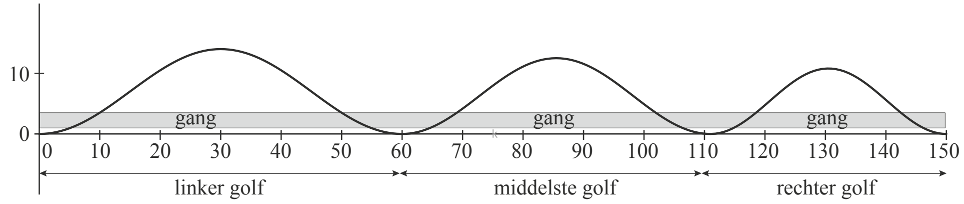
4p **14** Bereken de waarde van a in drie decimalen nauwkeurig op basis van deze twee wereldrecords.

Zentrum Paul Klee

Op de foto's zie je het Zentrum Paul Klee in Zwitserland. Het gebouw heeft een bijzondere vorm: het bestaat uit drie afdelingen met daaroverheen een golvend dak.

De drie afdelingen zijn verbonden door een lange gang. In figuur 1 zie je een schematische doorsnede van het gebouw en de lange gang. In deze figuur is duidelijk te zien dat het dak bestaat uit drie golven met verschillende periodes. Ook de hoogtes zijn verschillend.

figuur 1



Elke golf begint en eindigt op een laagste punt. Voor de linker golf in de figuur kan men de volgende formule opstellen:

$$h = 7 + 7\sin\left(\frac{2\pi}{60}(x - 15)\right)$$

Hierin is h de hoogte van de golf boven het laagste punt in meter en x de horizontale afstand in meter vanaf het beginpunt van deze golf.

De vloer van de gang bevindt zich 1 meter boven het laagste punt van de golven. De gang zelf is 3,5 meter hoog.

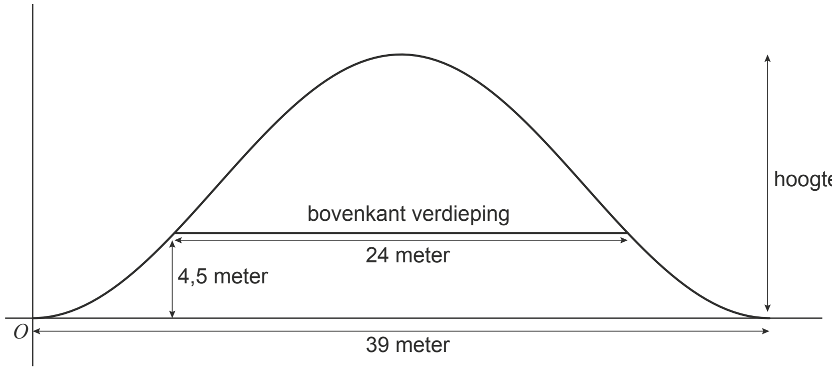
4p **15** Bereken de lengte van het gedeelte van de gang dat zich geheel onder het linker dak, dus onder de linker golf, bevindt in cm nauwkeurig.

De golf die hoort bij het middelste dak is 51 meter lang en 12,5 meter hoog. Hier hoort een formule bij van de vorm $h = a + a\sin(c(x - d))$ met h de hoogte van de golf in meter boven het laagste punt en x de horizontale afstand in meter vanaf het beginpunt van de linker golf.

4p **16** Bereken de waarden van a, c en d in deze formule.

We kijken nu naar het rechter dak. Om de afmetingen hiervan te berekenen, kan de architect bijvoorbeeld als volgt te werk gaan. Hij gaat voor het dak uit van een sinusoïde met een periode van 39 meter. Verder wil hij dat onder het dak een benedenverdieping past van 24 meter breed en 4,5 meter hoog. In figuur 2 is de doorsnede getekend die bij deze situatie hoort. De golf begint linksonder in het punt met coördinaten (0, 0).

figuur 2



5p **17** Bereken welke hoogte de architect nu minimaal moet nemen voor de golf die hoort bij het dak in deze situatie. Geef je antwoord in dm nauwkeurig.

Pi in het oude India

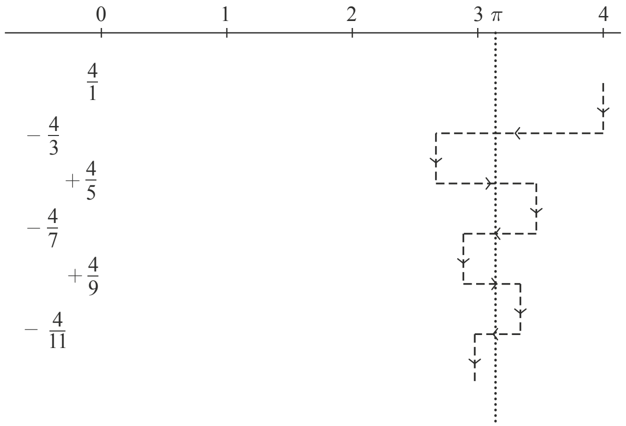
In de 14e eeuw ontdekte de Indiase wiskundige Madhava een manier om de waarde van π te benaderen met behulp van een rij.

Hij begon met 4. Dat is groter dan π. Hij telde hier $-\frac{4}{3}$ bij op. Het resultaat $2\frac{2}{3}$ is nu kleiner dan π . Vervolgens telde hij bij het antwoord $\frac{4}{5}$ op. Het resultaat $3\frac{7}{15}$ is nu weer groter dan π.

Hij ging zo verder, dus:

$$\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \ldots$$

Na elke nieuwe term die hij erbij optelde, kwam hij steeds dichter bij het getal π. Zie de figuur.



Madhava kon bewijzen dat hij op deze manier inderdaad steeds dichter bij de werkelijke waarde van π kwam. Nadeel van deze manier is echter wel dat je veel termen nodig hebt voor een redelijke benadering van π. Het resultaat na drie termen: $3\frac{7}{15}$ verschilt nog behoorlijk van π.

3p **18** Bereken hoeveel termen je minimaal nodig hebt om te zorgen dat het verschil met π kleiner is dan 0,1.

Madhava telde voor zijn benadering van π de termen van een rij bij elkaar op, namelijk de termen van de volgende rij: $\frac{4}{1}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{5}, -\frac{4}{7}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{11}, \ldots$

De directe formule voor deze rij is van de vorm:

$$u_n = \frac{a \cdot (-1)^{n-1}}{b \cdot (n-1) + 1} \quad \text{met } n = 1, 2, 3, \ldots$$

3p **19** Bepaal de waarden van a en b in deze directe formule.

Madhava gaf ook een andere benaderingsaanpak. Hierbij leidde de somrij sneller tot een goede benadering van π dan bij zijn eerste methode. Ook bij die andere aanpak werd er beurtelings iets afgetrokken en iets opgeteld.
Die andere aanpak van Madhava zag er als volgt uit:

$$S_1 = \sqrt{12} \cdot 1$$

$$S_2 = \sqrt{12} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3}\right)$$

$$S_3 = \sqrt{12} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2}\right)$$

$$S_4 = \sqrt{12} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3}\right)$$

$$S_5 = \sqrt{12} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4}\right)$$

enzovoort.

5p **20** Stel de recursieve formule op voor de somrij S_n met n = 2, 3, 4, ... en $S_1 = \sqrt{12}$ van de andere benaderingsaanpak van Madhava.

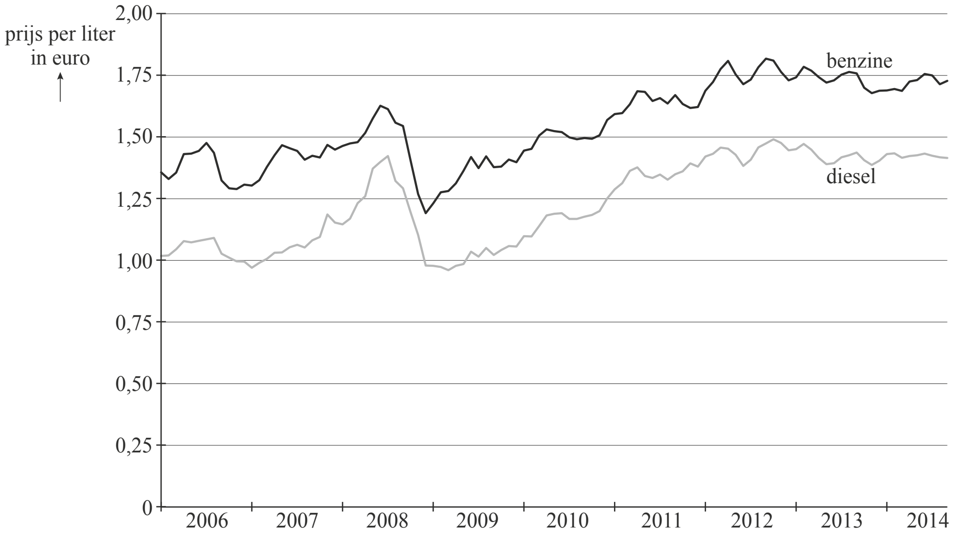
Benzine of diesel?

Peter is van plan binnenkort een andere auto aan te schaffen. Hij heeft zijn keuze laten vallen op een Volvo V70 uit 2015, maar twijfelt tussen twee uitvoeringen van deze auto, de **Nordic** en de **Nomadic**. Zie tabel 1.

tabel 1

uitvoering	brandstof	gewicht (kg)	verbruik (liter per 100 km)
Nordic	benzine	1595	6,4
Nomadic	diesel	1655	4,5

De Nordic rijdt op benzine, terwijl de Nomadic op diesel rijdt. Het voordeel van een auto die op diesel rijdt, is dat die auto een stuk zuiniger is: niet alleen kan een dieselauto meer kilometers per liter brandstof rijden, diesel is ook nog eens een stuk goedkoper dan benzine. Zie de figuur.



In de figuur is duidelijk te zien dat de prijzen voor brandstof sinds 2012 redelijk stabiel zijn. Op het moment dat Peter over zijn auto-aanschaf nadenkt, is de verwachting dat dit in de toekomst zo zal blijven.

Het nadeel van auto's op diesel is dat de wegenbelasting voor deze auto's veel hoger is dan die voor auto's die op benzine rijden. Zie tabel 2.

tabel 2: wegenbelasting per 3 maanden

gewichtsklasse	benzine	diesel	aardgas
1451–1550	€ 218	€ 406	€ 318
1551–1650	€ 242	€ 442	€ 355
1651–1750	€ 265	€ 478	€ 393

Peter gaat ervan uit dat de overige kosten, zoals verzekering en onderhoud, bij beide uitvoeringen gelijk zullen zijn. Peter houdt in de vergelijking geen rekening met het eventuele verschil in aanschafkosten tussen beide uitvoeringen.

Omdat rijden op diesel voordeliger is dan rijden op benzine, zal de dieseluitvoering vanaf een bepaald aantal kilometers per jaar voordeliger zijn dan de benzine-uitvoering.

7p **21** Onderzoek met behulp van de gegevens vanaf welk aantal kilometers per jaar de dieseluitvoering voordeliger zal zijn dan de benzine-uitvoering.
Rond je antwoord af op honderden kilometers.

Hints bij examen 2017-I

1 De elektriciteitsprijs en de opbrengst stijgen met hetzelfde percentage. Bereken de opbrengst in het eerste jaar. Dit is $Z(1)$.

2 Bereken de subsidie (houd rekening met het maximum). Deel het aankoopbedrag door de verwachte jaarlijkse opbrengst.

3 T differentiëren met de quotiëntregel. Maar eerst de breuk herleiden en differentiëren zonder quotiëntregel kan ook.

4 Als $x \leq 9$ hoeft dankzij 15% subsidie slechts 85% van de vaste kosten en de kosten voor de panelen te worden betaald.

5 Bereken eerst de verwachte levensduur in minuten en reken dit om naar jaren.

6 Volg de berekeningswijze van de vorige vraag maar nu met variabelen L en H.

7 Herschrijf H en differentieer. H' is een breuk. Verklaar het gedrag van H' met behulp van de teller en de noemer.

8 De gegevens betreffende hartslag en levensverwachting van hamster en walvis kun je zien als de coördinaten van twee punten van de grafiek.

9 Gebruik de regels:

$$g^a = b \Leftrightarrow a = {}^g\log(b) \quad \text{en} \quad {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right) = {}^g\log(a) - {}^g\log(b) \quad \text{en} \quad {}^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}.$$

10 Vul de gegeven waarden van T_1, d_1 en d_2 in.

11 Het omrekenen van meters naar kilometers vindt zowel in de teller als de noemer plaats.

12 Als de afstand verdubbelt, kun je $d_2 = 2 \cdot d_1$ invullen in de formule.

Voor de gemiddelde snelheid geldt $\dfrac{\text{afgelegde afstand}}{\text{gebruikte tijd}}$.

13 Gebruik de regels $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$ en $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$.

14 Vul alle gegevens in en bereken a met een logaritme of via de rekenmachine met *Solver* of *intersect/snijpunt.*

15 Stel een vergelijking op en los deze op met de rekenmachine.

16 De amplitude is de helft van de hoogte, *periode* $= \dfrac{2\pi}{c}$ en d wordt bepaald door een startplek van de grafiek.

17 Een mogelijke formule van deze sinusoïde is $f(x) = a + a\sin(c(x-d))$. Bereken c en d op dezelfde wijze als in de vorige vraag. Ga na voor welke waarde van x de hoogte van de sinusoïde 4,5 moet zijn.

18 Een directe formule is lastig te maken (komt pas in de volgende vraag), dus hier herhaaldelijk uitproberen. Je mag de formule uit de volgende vraag nog niet gebruiken.

19 Gebruik de eerste term om a te berekenen. Daarna een andere term voor b.

20 Onderzoek hoe de rij u_n van verschillen eruit ziet: $u_1 = S_1$, $u_2 = S_2 - S_1$, $u_3 = S_3 - S_2$ enzovoort. Probeer er regelmaat in te ontdekken.

21 Voor beide auto's moeten twee soorten kosten worden opgeteld: de brandstofkosten en de wegenbelasting per jaar. Stel het aantal kilometers per jaar op x en stel kosten-formules op.

Uitwerkingen bij examen 2017-I

Zonnepanelen

4p **1** De elektriciteitsprijs stijgt jaarlijks met 5% dus ook de opbrengst van de zonnepanelen stijgt met 5% per jaar. [1p] De groeifactor van de opbrengst is dan 1,05. [1p]
De opbrengst in het eerste jaar is $Z(1) = 1750 \cdot 0{,}225 = 393{,}75$ euro [1p], dus de formule wordt $Z(t) = 393{,}75 \cdot 1{,}05^{t-1}$. Hieruit volgt $a = 393{,}75$ en $b = 1{,}05$. [1p]
Merk op dat de formule Z(t) niet geldt voor t = 0 omdat het 0e jaar niet bestaat.

4p **2** De aanschafprijs van 12 panelen is € 6299.
15% van 6299 is $0{,}15 \cdot 6299 = 944{,}85$ [1p] maar de subsidie is maximaal € 650 dus het aankoopbedrag van 12 panelen na aftrek van subsidie is $6299 - 650 = 5649$ euro. [2p]
De verwachte opbrengst van 12 panelen is $2500 \cdot 0{,}225 = 562{,}50$ euro per jaar.
$\dfrac{5649}{562{,}50} = 10{,}042\ldots$ dus het duurt iets meer dan 10 jaar totdat het aankoopbedrag volledig terug is verdiend. Dat gebeurt in het jaar 2023. [1p]

4p **3** T differentiëren met de quotiëntregel.

$$T = \frac{650 + 325x}{46{,}9x} \Rightarrow$$

$$T' = \frac{46{,}9x \cdot 325 - (650 + 325x) \cdot 46{,}9}{(46{,}9x)^2} \text{ [1p]} = \frac{15\,242{,}5x - 30\,485 - 15\,242{,}5x}{(46{,}9x)^2} = \frac{-30\,485}{(46{,}9x)^2} \text{ [1p]}$$

De teller van deze breuk is negatief en de noemer is zeker positief voor $x \geq 10$. [1p]
$T' = \dfrac{-30\,485}{(46{,}9x)^2}$ is dus zeker negatief voor $x \geq 10$.
Als x groter wordt (meer panelen aanschaffen) daalt de terugverdientijd T. [1p]
andere manier (zonder quotiëntregel, eerst T herleiden)

$$T = \frac{650 + 325x}{46{,}9x} = \frac{650}{46{,}9x} + \frac{325x}{46{,}9x} = \frac{650}{46{,}9}x^{-1} + \frac{325}{46{,}9} = (13{,}8\ldots) \cdot x^{-1} + 6{,}9\ldots \text{ [1p]} \Rightarrow$$

$$T' = -(13{,}8\ldots) \cdot x^{-2} = \frac{-13{,}8\ldots}{x^2} \text{ [1p]}$$

De teller van deze breuk is negatief en de noemer is zeker positief voor $x^3 \geq 10$.
$T' = \dfrac{-13{,}8\ldots}{x^2}$ is dus zeker negatief voor $x \geq 10$. [1p]
Als x groter wordt (meer panelen aanschaffen) daalt de terugverdientijd T. [1p]
Uit de vorm van T′ kan ook nog worden afgelezen: als x heel groot wordt, stijgt T′ naar nul, dus dan zal de terugverdientijd steeds langzamer dalen.

4p **4** *terugverdientijd in jaren* $= \dfrac{\textit{totale aanschafprijs in euro}}{\textit{jaarlijkse opbrengst in euro}}$
Als $x \leq 9$ hoeft dankzij 15% subsidie slechts 85% van de vaste kosten en de kosten voor de panelen te worden betaald: *totale aanschafprijs* $= 0{,}85 \cdot (1300 + 325x)$
De verwachte elektriciteitsopbrengst per paneel kan met behulp van de tabel worden berekend: *verwachte opbrengst per jaar* $= \dfrac{3750}{18} = 208{,}3\ldots$ kWh [1p] dus de *jaarlijkse opbrengst in euro* is $(208{,}3\ldots) \cdot 0{,}225 \cdot x = 46{,}875x$ [1p]
Voor de terugverdientijd geldt dan: $T = \dfrac{0{,}85 \cdot (1300 + 325x)}{46{,}875x}$ [2p]
Omdat de opbrengst niet verandert, is het ook toegestaan om de afgeronde noemer 46,9x zonder berekening over te nemen uit de vorige formule.

Eén miljard hartslagen

2p **5** Dit hondenras leeft $\frac{1\,000\,000\,000}{125} = 8\,000\,000$ minuten. [1p]
In een jaar zitten $60 \cdot 24 \cdot 365$ minuten dus 8 000 000 minuten is
$\frac{8\,000\,000}{60 \cdot 24 \cdot 365} = 15{,}2207\ldots$ jaar.
De gemiddelde levensduur is ongeveer 15 jaar. [1p]

4p **6** Uit de vorige opdracht volgt: $L = \frac{1\,000\,000\,000}{H \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365}$ [2p] $\Leftrightarrow L = \frac{1902{,}58\ldots}{H}$ [1p] $\Leftrightarrow$

$H = \frac{1902{,}58\ldots}{L}$

Dus afgerond is de formule: $H \approx \frac{1900}{L}$ [1p]

4p **7** H herschrijven en differentiëren: $H = \frac{1900}{L} = 1900 \cdot L^{-1} \Rightarrow H' = -1900 \cdot L^{-2} = -\frac{1900}{L^2}$ [2p]
H' is negatief voor elke positieve waarde van L dus de grafiek van H is dalend. [1p]
De teller van H' is constant maar de noemer wordt groter als L toeneemt, dus H' stijgt (asymptotisch naar 0) en de grafiek van H is afnemend dalend. [1p]

4p **8** De rechte lijn op het logaritmisch papier hoort bij een exponentieel verband van de vorm $H = b \cdot g^L$. De grafiek gaat bij benadering door het punt van de hamster (3, 450) en het punt van de walvis (60, 25).
De groeifactor is dan $\frac{25}{450}$ bij een verschil van 57 jaar. [1p]
De groeifactor bij een verschil van 1 jaar is dan $g = \left(\frac{25}{450}\right)^{\frac{1}{57}}$ [1p] $= 0{,}95055\ldots$
en afgerond op drie decimalen geeft dat $g = 0{,}951$. [1p]
Om b te berekenen de niet-afgeronde groeifactor gebruiken.
Op de grafiek van $H = b \cdot (0{,}95055\ldots)^L$ ligt bijvoorbeeld het punt van de hamster (3, 450):
$450 = b \cdot (0{,}95055\ldots)^3 \Leftrightarrow b = \frac{450}{(0{,}95055\ldots)^3} = 523{,}9\ldots$ dus afgerond op gehelen:
$b = 524$. [1p]

5p **9** $H = 520 \cdot 0{,}95^L \Leftrightarrow \frac{H}{520} = 0{,}95^L$ [1p] $\Leftrightarrow L = {}^{0{,}95}\log\left(\frac{H}{520}\right) =$ [1p]

${}^{0{,}95}\log(H) - {}^{0{,}95}\log(520)$ [1p] $= \frac{\log(H)}{\log(0{,}95)} - \frac{\log(520)}{\log(0{,}95)}$ [1p] $= \frac{1}{\log(0{,}95)} \cdot \log(H) - \frac{\log(520)}{\log(0{,}95)} \Rightarrow$

$a = \frac{1}{\log(0{,}95)} \approx -44{,}89$ en $b = -\frac{\log(520)}{\log(0{,}95)} \approx 121{,}92$ [1p]

De formule van Riegel en kilometertijden

3p **10** $d_1 = 1500$ meter, $d_2 = 10\,000$ en 4 minuten en 52 seconden is 292 seconden $= T_1$ [1p] $\Rightarrow$
$T_2 = 292 \cdot \left(\frac{10\,000}{1500}\right)^{1{,}07} = 2223{,}13\ldots$ seconde [1p] $= \frac{2223{,}13\ldots}{60} = 37{,}052\ldots$ minuten.
$(0{,}052\ldots) \cdot 60 = 3{,}13\ldots$ dus Haralds te verwachten tijd op de 10 000 meter is 37 minuten en 3 seconden. [1p]

2p **11** De omrekeningsfactor van meters naar kilometers is 0,001, dus
d_1 in meters $= 0{,}001 \cdot d_1$ in kilometers en hetzelfde geldt voor d_2. [1p]
Voor de uitkomst van de breuk $\frac{d_2}{d_1}$ maakt het niet uit of je deze vervangt door $\frac{0{,}001 \cdot d_2}{0{,}001 \cdot d_1}$

want de uitkomst blijft gelijk.
Dan geldt ook $T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{1{,}07} = T_1 \cdot \left(\frac{0{,}001 \cdot d_2}{0{,}001 \cdot d_1}\right)^{1{,}07}$ dus het maakt niet uit of je de afstand in meters of in kilometers invult. [1p]

5p **12** Begin met afstand d_1. Als de afstand tweemaal zo groot wordt, geldt $d_2 = 2 \cdot d_1$.
Invullen in de formule geeft:

$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{2 \cdot d_1}{d_1}\right)^{1{,}07}$ [1p] $= T_1 \cdot 2^{1{,}07} = (2{,}099\ldots) \cdot T_1$ [1p]

De gemiddelde snelheid bij afstand d_1 en tijd T_1 is $\frac{d_1}{T_1}$.

De gemiddelde snelheid bij afstand d_2 en tijd T_2 is $\frac{d_2}{T_2} = \frac{2 \cdot d_1}{(2{,}099\ldots) \cdot T_1}$ [1p]

$= (0{,}9526\ldots) \cdot \frac{d_1}{T_1}$. [1p]

De afname van de gemiddelde snelheid is $100 - 95{,}26\ldots \approx 4{,}7\%$. [1p]
andere manier (in de opgave wordt al gesteld dat de gemiddelde snelheid met een vast percentage afneemt bij verdubbeling van de afstand; daarom is het voldoende om met een getallenvoorbeeld te rekenen)
Neem bijvoorbeeld $d_1 = 1500$ en $d_2 = 3000$:
$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{3000}{1500}\right)^{1{,}07} = T_1 \cdot 2^{1{,}07} = (2{,}099\ldots) \cdot T_1$ [2p]
De gemiddelde snelheid bij afstand d_1 en tijd T_1 is $\frac{d_1}{T_1}$.

De gemiddelde snelheid bij afstand d_2 en tijd T_2 is $\frac{d_2}{T_2} = \frac{2 \cdot d_1}{(2{,}099\ldots) \cdot T_1}$ [1p]

$= (0{,}9526\ldots) \cdot \frac{d_1}{T_1}$. [1p]

De afname van de gemiddelde snelheid is $100 - 95{,}26\ldots \approx 4{,}7\%$. [1p]

4p **13** $K = \frac{T}{d} = \frac{206 \cdot \left(\frac{d}{1{,}5}\right)^{1{,}07}}{d}$ [1p] $= \frac{206 \cdot \frac{d^{1{,}07}}{1{,}5^{1{,}07}}}{d}$ [1p] $= \frac{\frac{206}{1{,}5^{1{,}07}} \cdot d^{1{,}07}}{d} = \frac{206}{1{,}5^{1{,}07}} \cdot \frac{d^{1{,}07}}{d}$ [1p]

$= \frac{206}{1{,}5^{1{,}07}} \cdot d^{0{,}07}$

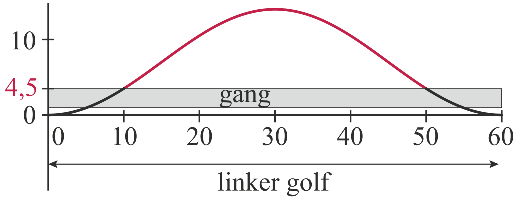
dus $p = \frac{206}{1{,}5^{1{,}07}} \approx 133{,}49$ en $q = 0{,}07$. [1p]

4p **14** $d_1 = 5000$ meter en $T_1 = 6 \cdot 60 + 3{,}32 = 363{,}32$ seconde.
$d_2 = 10\,000$ meter en $T_2 = 12 \cdot 60 + 36{,}30 = 756{,}30$ seconde. [1p]
Alles in vullen in de formule:
$756{,}30 = 363{,}32 \cdot \left(\frac{10\,000}{5000}\right)^a$ [1p] $\Leftrightarrow \frac{756{,}30}{363{,}32} = 2^a \Leftrightarrow 2^a = 2{,}08\ldots \Leftrightarrow$
$a = {}^2\log(2{,}08\ldots)$ [1p] $\approx 1{,}058$ [1p]

Zentrum Paul Klee

4p **15** De bovenkant van de gang ligt op 4,5 meter hoogte.

Voer in de rekenmachine in $y_1 = 7 + 7\sin\left(\frac{2\pi}{60}(x - 15)\right)$ en $y_2 = 4{,}5$. [1p]



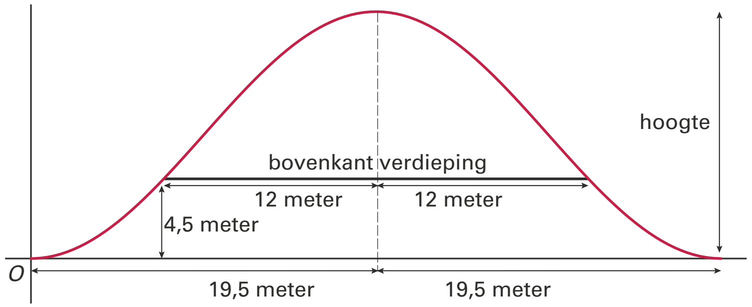
De optie *intersect/snijpunt* [1p] geeft $x = 11{,}512...$ en $x = 48{,}487...$ [1p]
Het verschil tussen beide x-waarden is 36,974... meter.
Afgerond op cm is de gevraagde afstand 36,97 m. [1p]

4p **16** De periode is 51 dus $\frac{2\pi}{c} = 51 \Leftrightarrow c = \frac{2\pi}{51}$. [1p]

Het dak is 12,5 meter hoog dus $2a = 12{,}5 \Leftrightarrow a = 6{,}25$. [1p]

De golf van het middelste dak start op het laagste punt bij $x = 60$. Een kwart periode later gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand [1p] dus $d = 60 + \frac{1}{4} \cdot 51 = 72{,}75$. [1p]

5p **17** Een mogelijke formule van een sinusoïde is $f(x) = a + b\sin(c(x - d))$.
Omdat amplitude en evenwichtsstand in dit geval gelijk zijn, geldt $a = b$ dus dan wordt de formule $f(x) = a + a\sin(c(x - d))$.



De periode is 39 dus $\frac{2\pi}{c} = 39 \Leftrightarrow c = \frac{2\pi}{39}$.

De sinusoïde start op het laagste punt bij $x = 0$. Na een kwart periode gaat de grafiek stijgend door de evenwichtsstand dus $d = \frac{1}{4} \cdot 39 = 9{,}75$.

Met deze gegevens wordt de formule nu $f(x) = a + a\sin\left(\frac{2\pi}{39}(x - 9{,}75)\right)$. [1p]

De sinusoïde bereikt het hoogste punt bij $x = 19{,}5$. En 12 meter daarvoor, dus bij $x = 7{,}5$, moet de hoogte 4,5 meter zijn: [1p]

$f(7{,}5) = a + a\sin\left(\frac{2\pi}{39}(7{,}5 - 9{,}75)\right) = 4{,}5 \Leftrightarrow$

$a\left(1 + \sin\left(\frac{2\pi}{39}(7{,}5 - 9{,}75)\right)\right) = 4{,}5 \Leftrightarrow a = \frac{4{,}5}{1 + \sin\left(\frac{2\pi}{39}(7{,}5 - 9{,}75)\right)}$ [1p] $= 6{,}972...$ meter

Het dak moet ten minste $2a$ hoog zijn dus 13,944... meter. [1p]
Afgerond op decimeter moet de architect het dak minimaal 14,0 meter maken. [1p]
Naar boven afronden want anders past de benedenverdieping niet onder het dak!

©ThiemeMeulenhoff

Pi in het oude India

3p **18** *Herhaaldelijk uitproberen.*

(som eerste 9 termen) $- \pi = \left(\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \frac{4}{17}\right) - \pi = 0{,}11...$ [1p]
$\pi -$ (som eerste 10 termen) $= \pi - \left(\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \frac{4}{17} - \frac{4}{19}\right) = 0{,}09...$
[1p]

Er zijn minimaal 10 termen nodig om het verschil met π kleiner dan 0,1 te krijgen. [1p]

3p **19** $u_1 = 4 \Rightarrow \frac{a \cdot (-1)^{1-1}}{b \cdot (1 - 1) + 1} = 4 \Leftrightarrow a = 4$ [1p]

$u_2 = -\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{4 \cdot (-1)^{2-1}}{b \cdot (2 - 1) + 1} = -\frac{4}{3}$ [1p] $\Leftrightarrow \frac{-4}{b + 1} = \frac{-4}{3} \Leftrightarrow b + 1 = 3 \Leftrightarrow b = 2$ [1p]
In plaats van u_2 kan elke volgende term gebruikt worden om b te berekenen, bijvoorbeeld:
$u_3 = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{4 \cdot (-1)^{3-1}}{b \cdot (3 - 1) + 1} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{4}{2b + 1} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 2b + 1 = 5 \Leftrightarrow b = 2$

5p **20** De eerste vijf termen van de rij die door de somrij wordt opgeteld zijn:
$u_1 = \sqrt{12} \cdot 1$, $u_2 = \sqrt{12} \cdot -\frac{1}{3 \cdot 3}$, $u_3 = \sqrt{12} \cdot \frac{1}{5 \cdot 3^2}$, $u_4 = \sqrt{12} \cdot -\frac{1}{7 \cdot 3^3}$ en

$u_5 = \sqrt{12} \cdot \frac{1}{9 \cdot 3^4}$
De termen moeten om-en-om positief en negatief worden. Dit kan met een factor $(-1)^{n-1}$ zoals in de vorige vraag. [1p]

De eerste term kan ook worden geschreven als $u_1 = \sqrt{12} \cdot \frac{1}{1 \cdot 3^0}$ dus de linker factor in de noemer doorloopt de oneven getallen 1, 3, 5, 7, 9 enzovoort. Dit kan met de formule $(2n - 1)$. [1p]
De rechter factor in de noemer ziet er achtereenvolgens zo uit: $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4$ enzovoorts. Dit kan met de formule 3^{n-1}. [1p]

Een recursieve formule voor de somrij is $S_n = S_{n-1} + \sqrt{12} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{(2n - 1) \cdot 3^{n-1}}$ [2p] met $S_1 = \sqrt{12}$.

Benzine of diesel?

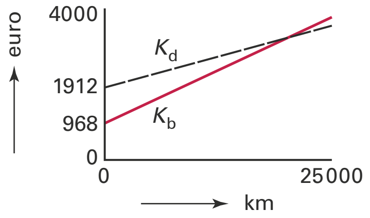
7p **21** Voor beide auto's moeten twee soorten kosten worden opgeteld: de brandstofkosten en de wegenbelasting per jaar. Stel het aantal kilometers per jaar op x.

De Nordic is een benzine-auto van 1595 kg dus de jaarlijkse wegenbelasting bedraagt $4 \times 242 = 968$ euro per jaar.
De benzine kost sinds 2012 ongeveer 1,75 euro. [1p]
Het verbruik van deze auto is 6,4 liter per 100 km, dus 0,064 liter per km.
De brandstofkosten per jaar komen dan op $x \cdot 0{,}064 \cdot 1{,}75 = 0{,}112x$ euro.
De totale kosten aan brandstof en wegenbelasting zijn $K_b = 0{,}112x + 968$. [1p]

De Nomadic is een diesel-auto van 1655 kg dus de jaarlijkse wegenbelasting bedraagt $4 \times 478 = 1912$ euro per jaar.
De diesel kost sinds 2012 ongeveer 1,45 euro. [1p]
Het verbruik van deze auto is 4,5 liter per 100 km, dus 0,045 liter per km.
De brandstofkosten per jaar komen dan op $x \cdot 0{,}045 \cdot 1{,}45 = 0{,}06525x$ euro.
De totale kosten aan brandstof en wegenbelasting zijn $K_d = 0{,}06525x + 1912$. [1p]

©ThiemeMeulenhoff

K_b en K_d zijn lineaire formules.



Snijpunt berekenen (*mag ook met de rekenmachine*):
$0{,}112x + 968 = 0{,}06525x + 1912$ [1p] $\Leftrightarrow$ $0{,}112x - 0{,}06525x = 1912 - 968$ $\Leftrightarrow$

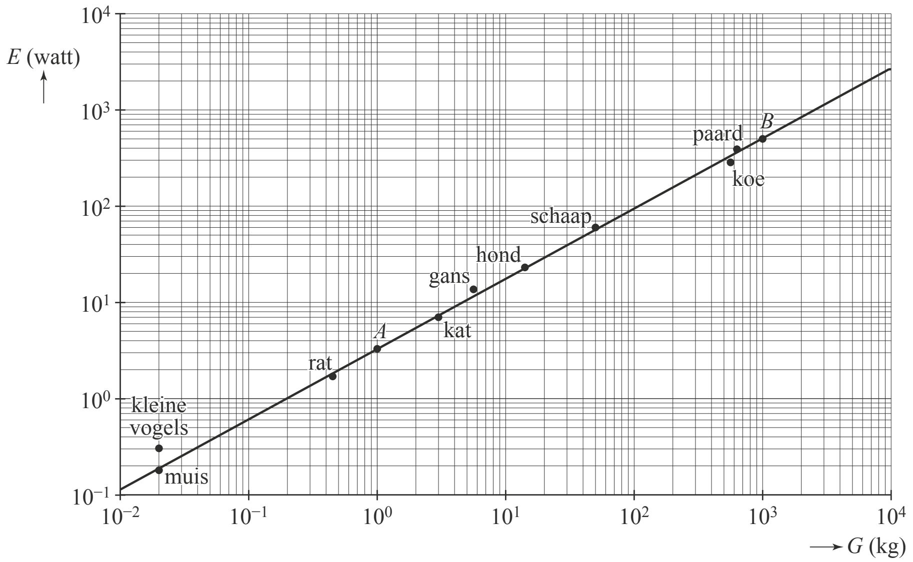
$0{,}04675x = 944$ $\Leftrightarrow$ $x = \frac{944}{0{,}04675} \approx 20\,193$ [1p]

Afgerond op honderden kilometers zal de dieseluitvoering vanaf 20 200 kilometer goedkoper zijn dan de benzine-uitvoering. [1p]
De afgelezen benzineprijzen kunnen iets verschillen. Hierdoor zullen de kostenformules en ook het eindantwoord iets anders uitpakken.

Examen 2017-II

Gewicht van dieren

Bij dieren is het energieverbruik afhankelijk van het gewicht.
In de figuur staat voor een aantal diersoorten het verband tussen het energieverbruik E en het gewicht G. Hierbij is E het energieverbruik in watt en G het gewicht in kg.



Zowel langs de horizontale as als langs de verticale as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt. De punten die de verschillende dieren weergeven, liggen nagenoeg op de getekende rechte lijn door de punten $A(1; 3{,}27)$ en B $(1000; 520)$. Het verband tussen E en G is te schrijven als:

$E = a \cdot G^b$

Hierin is E het energieverbruik in watt en G het gewicht in kg.
Afgerond zijn de waarden van a en b: $a = 3{,}3$ en $b = 0{,}73$.

4p **1** Bereken, uitgaande van de genoemde punten A en B, de waarde van a in twee decimalen nauwkeurig en de waarde van b in drie decimalen nauwkeurig.

Aan de hand van de figuur en de formule $E = 3{,}3 \cdot G^{0{,}73}$ kun je onderzoeken of de volgende uitspraken waar zijn.
I. Een tien keer zo zwaar dier verbruikt ook tien keer zo veel energie.
II. Een kat verbruikt per kg gewicht minder energie dan een schaap.

5p **2** Onderzoek voor beide uitspraken of ze waar zijn. Gebruik zo nodig de figuur.

3p **3** Stel een formule op voor de afgeleide van E en onderzoek met behulp hiervan of E toenemend stijgend of afnemend stijgend is.

Je kunt de formule $E = 3{,}3 \cdot G^{0{,}73}$ herleiden tot de vorm
$\log(E) = p + q \cdot \log(G)$.

4p **4** Geef deze herleiding en geef de waarden van p en q in twee decimalen nauwkeurig.

Zuiniger rijden

Veel moderne auto's tonen op het bedieningspaneel een schatting van het aantal kilometers dat je nog kunt rijden zonder te tanken.
Dit noem je de **actieradius**.
Een automobilist zag bijvoorbeeld de informatie van figuur 1 op zijn bedieningspaneel.
Hier is 'Tot. afstand' de totale afstand die de auto tot dat moment heeft gereden.

figuur 1

```
Actieradius  545 km
--------------------
Tot. afstand 7927 km
```

De actieradius wordt berekend op basis van:
- de nog aanwezige hoeveelheid benzine in de tank;
- het rijgedrag tot op dat moment.

Toen dezelfde automobilist wat zuiniger ging rijden, kreeg hij de informatie van figuur 2 te zien. Zoals je ziet, heeft hij 20 km gereden. Toch is zijn actieradius niet met 20 km afgenomen, maar slechts met 17 km.
Hij is dus inderdaad iets zuiniger gaan rijden en hij heeft zodoende 3 kilometer **'gewonnen'**.

figuur 2

```
Actieradius  528 km
--------------------
Tot. afstand 7947 km
```

De automobilist neemt zich voor om op zekere dag zijn benzinetank volledig te vullen en dan zo zuinig mogelijk te gaan rijden. De afstand in km die hij rijdt vanaf het moment dat hij getankt heeft, noemen we x.
De automobilist houdt de eerste 200 km bij wat er gebeurt met de actieradius A (in km) op zijn bedieningspaneel. Zie de tabel.

x	0	50	100	150	200
$A(x)$	625	582	539	496	452

Tussen $x = 0$ en $x = 100$ neemt de actieradius met minder dan 100 km af.
De automobilist 'wint' dus kilometers op dit traject.

3p **5** Bereken hoeveel kilometer hij op dit traject wint door zuinig te rijden.

De automobilist maakt een wiskundig model bij de tabel. Hij stelt de volgende formule op:

$$A(x) = 5000 \cdot \frac{5000 - 7{,}2x}{40\,000 - 3x}$$

Op het moment dat hij begint te rijden met de volle tank, dus als $x = 0$, is de actieradius veel kleiner dan de afstand die hij in werkelijkheid zal rijden met deze tankinhoud.

Op het moment dat de tank leeg is, is de actieradius gelijk aan 0.

4p **6** Bereken hoeveel km de automobilist volgens het model met een volle tank in werkelijkheid méér kan rijden dan het bedieningspaneel bij vertrek aangaf.

Dat de automobilist inderdaad kilometers wint, kun je ook nagaan door het verloop te bekijken van de som $S(x)$ van het aantal werkelijk gereden kilometers en de actieradius. Als de automobilist kilometers wint, zal $S(x)$ namelijk stijgend zijn. De formule voor $S(x)$ is:

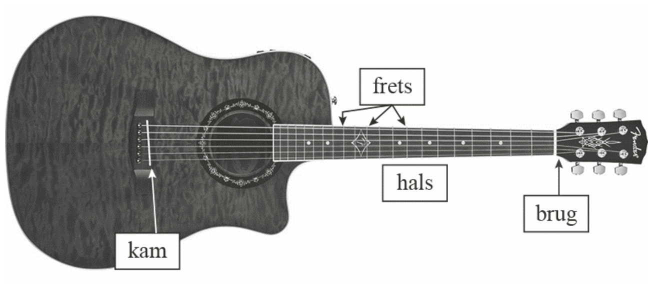
$$S(x) = x + A(x) = x + 5000 \cdot \frac{5000 - 7{,}2x}{40\,000 - 3x}$$

5p **7** Bepaal de afgeleide van $S(x)$ en laat met behulp van een schets van de afgeleide zien dat de automobilist op het traject van $x = 0$ tot $x = 500$ voortdurend kilometers wint.

Gitaar

In figuur 1 zie je een gitaar. De snaren zijn gespannen tussen de **brug** en de **kam**. Op de hals zijn zogenoemde **frets** (smalle metalen strips) te zien.

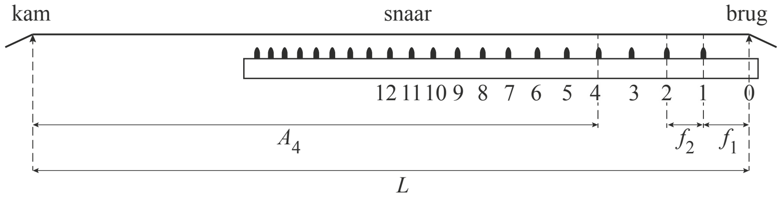
figuur 1



Als je een snaar aanslaat zonder op een fret te drukken, gaat de hele snaar tussen de brug en de kam trillen. Door een snaar tegen een fret aan te drukken, wordt de gebruikte snaarlengte korter. Je krijgt dan een andere toon. Om de goede tonen te krijgen, moet bij het bouwen van een gitaar de juiste plaats van de frets berekend worden.

Figuur 2 geeft een schematisch zijaanzicht van de hals. De eerste 12 frets zijn daarin vanaf de brug genummerd.

figuur 2



De lengte van een snaar in cm tussen de brug en de kam noemen we L.
A_n is de afstand in cm tussen de fret met nummer n en de kam. In figuur 2 is A_4 aangegeven. Voor A_n geldt de volgende formule:

$A_n = L \cdot 0{,}9439^n$

Van een bepaalde gitaar is de afstand tussen fret nummer 6 en de brug gelijk aan 20 cm.

4p **8** Bereken de lengte L van een snaar van deze gitaar. Rond je antwoord af op hele cm.

De groeifactor in de formule is berekend op basis van de volgende uitgangspunten:
- er is een exponentieel verband tussen A_n en n;
- de 12e fret ligt precies midden tussen de brug en de kam.

4p **9** Bereken met behulp van deze twee uitgangspunten de groeifactor in vijf decimalen nauwkeurig.

De theoretische formule die hiervoor geldt, is:

$$A_n = \frac{L}{2^{\left(\frac{n}{12}\right)}}$$

Deze formule kan worden herleid tot:

$$A_n = L \cdot 0{,}9439^n$$

3p **10** Laat deze herleiding zien.

In de zestiende eeuw werd voor het berekenen van de positie van de frets een recursieve methode gebruikt, de 'Regel van 18'. Deze rekenwijze gaat als volgt:
- Deel de totale snaarlengte L door 18. De uitkomst is de afstand tussen de brug en fret 1. Deze afstand noemen we f_1 (zie figuur 2).
- De afstand tussen fret 2 en fret 1 noemen we f_2 (zie figuur 2), de afstand tussen fret 3 en fret 2 noemen we f_3, enzovoort.
- De afstand tussen fret n en fret n – 1 wordt berekend met:

  $f_n = \frac{17}{18} \cdot f_{n-1}$ met $f_1 = \frac{1}{18}L$.

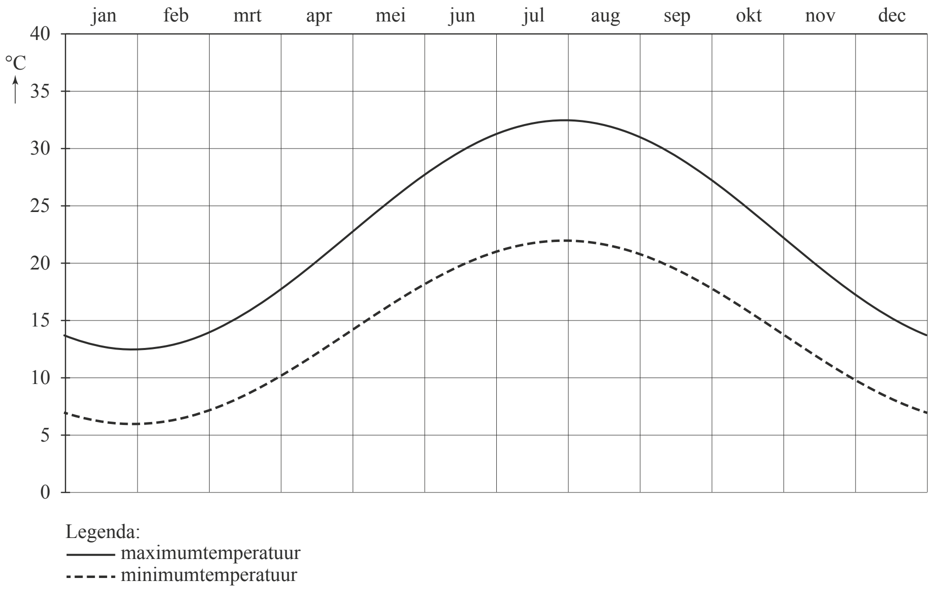
Een gitaarbouwer wil voor het plaatsen van de frets de afstanden tussen de brug en de frets weten. Hij kan deze afstanden met de Regel van 18 of met de formule berekenen. Deze twee methoden leveren verschillende afstanden op. Ga uit van een afstand tussen brug en kam van 65 cm.

4p **11** Onderzoek hoeveel de afstand tussen de brug en fret 2, berekend met de formule, verschilt van de afstand berekend met de Regel van 18. Geef je antwoord in tienden van mm nauwkeurig.

4p **12** Bereken vanaf welke fret de afstand tot de volgende fret volgens de Regel van 18 kleiner is dan 1,6 cm.

Pythagorion

Al jaren wordt van het stadje Pythagorion op het Griekse eiland Samos dagelijks de minimum- en maximumtemperatuur bijgehouden. Voor alle dagen van het jaar is zowel van de minimum- als van de maximumtemperatuur op die dag het gemiddelde over een periode van 30 jaar berekend. In de figuur staan de grafieken van deze gemiddelde temperaturen.



De maximumtemperatuur laat zich redelijk beschrijven door de formule:

$$T_{max} = 22{,}5 + 10\sin(0{,}0172(t - 120))$$

Hierin is T_{max} in graden Celsius, t in dagen en t = 1 op 1 januari.

Wandelaars bezoeken het eiland bij voorkeur niet als de maximumtemperatuur boven de 30 °C ligt.

3p **13** Bereken hoeveel dagen in een jaar de maximumtemperatuur boven de 30 °C ligt.

De grafiek van de minimumtemperatuur ligt lager dan de grafiek van de maximumtemperatuur, maar de toppen van de grafieken liggen recht onder elkaar. Ook de grafiek van de minimumtemperatuur is bij benadering een sinusoïde.

4p **14** Stel met behulp van de figuur een formule op voor de minimumtemperatuur.

Een reisorganisatie biedt vakanties aan naar Samos. Voor een bepaalde periode hebben ze nog 28 vliegtuigstoelen over. Door deze als last minute aan te bieden vindt de reisorganisatie daarvoor 14 keer twee gegadigden. De reisorganisatie kan ook nog 14 tweepersoons hotelkamers bijboeken: twee bij Nikos Place, vijf bij Hydrele Beach en zeven bij Kouros Bay.

3p **15** Bereken op hoeveel verschillende manieren de reisorganisatie de 14 stellen kan verdelen over de drie hotels.

Eén van de stellen is gekomen om te fietsen en te wandelen. Ze hebben een boekje met vijf fietstochten voor een hele dag en vijf wandeltochten voor een hele dag. Ze maken het volgende programma: eerst vijf dagen fietsen en daarna drie dagen wandelen. Ze maken elke dag een andere tocht uit het boekje.

3p **16** Bereken hoeveel verschillende programma's dit stel voor deze acht dagen kan maken.

Nooit meer koude benen

Op BBC Radio Nottingham geeft de weerman in de 'Stocking forecast' advies over de dikte van de te dragen panty's. De statisticus James Hind van de Nottingham Trent University heeft namelijk een formule ontwikkeld om te bepalen hoe dik je panty moet zijn om je er comfortabel bij te voelen. Bij zijn formule is de adviesdikte van de panty afhankelijk van de temperatuur en van de windsnelheid.

De formule luidt: $D = 110 - \dfrac{110}{1 + e^{0{,}159(\sqrt{w}-t)}}$

Hierbij is w de windsnelheid in kilometer per uur en t de temperatuur in graden Celsius. De adviesdikte D wordt uitgedrukt in denier: hoe groter de waarde van D, hoe dikker de panty.

De windsnelheid heeft in de praktijk minder invloed op de adviesdikte van de panty dan de temperatuur. Bij een temperatuur van 3,5 °C en windstil weer ($w = 0$) is volgens de formule een bepaalde dikte van panty's nodig. Als de windsnelheid verandert van 0 naar 20 km/uur, hoeft de temperatuur maar een paar graden te veranderen om dezelfde dikte van panty's te adviseren.

4p **17** Bereken hoeveel graden het dan warmer of kouder moet zijn om op dezelfde adviesdikte van panty's uit te komen. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Bij een vaste temperatuur hangt de adviesdikte D alleen af van de windsnelheid w.

4p **18** Leg alleen met behulp van de formule uit of de waarde van D toeneemt of afneemt als de windsnelheid w stijgt en de temperatuur gelijk blijft.

De waarde van D kan niet onbeperkt groot of onbeperkt klein worden.

3p **19** Onderzoek tussen welke twee theoretische grenswaarden de waarde van D volgens de formule kan liggen.

Carol volgde het advies van de weerman en koos bij windstil weer voor een dunne panty van 8 denier. Niet veel later begon het flink te waaien terwijl de temperatuur gelijk bleef. Ze had nu volgens de formule eigenlijk een panty van 17 denier aan moeten hebben.

4p **20** Bereken hoe warm het was en hoe hard het waaide. Geef je antwoorden in hele graden Celsius en in hele kilometers per uur.

Kamerhuur

Veel studentenkamers in Utrecht zijn te duur. Uit onderzoek is gebleken dat 86% van de Utrechtse studenten te veel betaalt voor hun kamer.

Om de maximale huurprijs van een studentenkamer te bepalen, is er het puntensysteem van de Huurcommissie. Een vereenvoudigde versie van dit systeem staat op de uitwerkbijlage.

Met het formulier op de uitwerkbijlage bereken je eerst op basis van je eigen ruimte en de gemeenschappelijke ruimtes het aantal punten p van je woonruimte. Vervolgens is bij ieder aantal punten p te berekenen wat de maximale huurprijs H per maand mag zijn met behulp van één van onderstaande formules:

$H = 2{,}05\,p$ als $0 \le p \le 180$
$H = 1{,}06\,p + 178{,}20$ als $p > 180$

Deze formules gelden voor het eerste jaar dat je de kamer bewoont.
Daarna wordt ervan uitgegaan dat de huur jaarlijks met 2% wordt verhoogd.

Thijn gaat per 1 juli 2016 wonen in een studentenhuis waar al drie andere studenten een kamer hebben. Hij heeft in dat huis de volgende voorzieningen:

- Een eigen kamer van 28 m^2 met daarin:
  - Centrale verwarming
  - Wastafel
- Een gemeenschappelijk deel bestaand uit:
  - Keuken van 10 m^2
  - Toilet
  - Douche
  - Tuin van 30 m^2
  - Schuur voor fietsen

De huur voor deze kamer is € 375 per maand.
De huisbaas gaat ervan uit dat Thijn vier jaar in de woning blijft wonen. In plaats van de maximaal toegestane maandelijkse huur ieder jaar met 2% te verhogen, verhoogt de huisbaas de maandelijkse huur van € 375 ieder jaar met een vast bedrag. Hij doet dus in totaal drie verhogingen: aan het eind van ieder jaar één.

7p **21** Onderzoek hoeveel de huisbaas de maandelijkse huur ieder jaar maximaal kan verhogen, zodat Thijn gedurende die vier jaar **in totaal** niet te veel huur betaalt.

Puntentelling: onzelfstandige woonruimte

Oppervlakte vertrekken

1. Wat is de oppervlakte van de vertrekken?

Eigen ruimtes: — Oppervlakte in m² — Punten

- ☐ Kamers ______
- ☐ Keuken ______ +
- ☐ Totaal ______ x 5 = ______

Gemeenschappelijke ruimtes indien samen groter dan 15 m²:

- ☐ Kamers ______
- ☐ Keuken ______ +
- Subtotaal A ______
- Aantal wooneenheden B ______
- Deel de uitkomst van A door de uitkomst van B ______ x 5 = ______

Centrale verwarming

2.1 Hoe groot zijn de verwarmde vertrekken?

Oppervlakte in m² — Punten

- ☐ Eigen kamers ______
- ☐ Eigen keuken ______ +
- Totaal ______ x 0,75 = ______

2.2 Heeft u geen cv, maar wel een gasaansluiting en een schoorsteen/rookgasafvoer?

- ☐ Ja, 3 punten invullen ______

Keuken

3 Welke voorzieningen heeft de keuken? — Punten

- ☐ Aparte eigen keuken — 20 punten invullen ______
- ☐ Eigen keuken in woonkamer of in gemeenschappelijke kamer — 10 punten invullen ______
- ☐ Gemeenschapplijke keuken — 4 punten invullen ______

Toilet

4 Wat voor toilet heeft de woning? — Punten

- ☐ Eigen toilet — 12 punten invullen ______
- ☐ Gemeenschappelijk toilet — 2 punten invullen ______

Badkamer

5 Wat voor badkamer heeft de woning? — Punten

- ☐ Eigen douche of bad — 15 punten invullen ______
- ☐ Gemeenschappelijke douche of bad — 3 punten invullen ______
- ☐ Eigen wastafel — 10 punten invullen ______
- ☐ Gemeenschappelijke wastafel in afsluitbare ruimte — 2 punten invullen ______

Buitenruimte

6 Beschikt de woning over een buitenruimte, zoals een balkon, tuin, terras of plaatsje? — Punten

Eigen buitenruimte

- ☐ 4 tot 10 m² — 3 punten invullen ______
- ☐ meer dan 10 m² — 9 punten invullen ______

Gemeenschappelijke buitenruimte

- ☐ 4 tot 10 m² — 2 punten invullen ______
- ☐ meer dan 10 m² — 6 punten invullen ______

Fietsenberging

7 Beschikt de woning over een fietsenberging? — Punten

- ☐ Eigen fietsenberging — 6 punten invullen ______
- ☐ Gemeenschappelijke fietsenberging — 3 punten invullen ______

Totaal

8 Totaal aantal punten

- Totaal aantal punten van vraag 1 Oppervlakte vertrekken ______
- Totaal aantal punten van vraag 2 Centrale verwarming ______
- Totaal aantal punten van vraag 3 Keuken ______
- Totaal aantal punten van vraag 4 Toilet ______
- Totaal aantal punten van vraag 5 Badkamer ______
- Totaal aantal punten van vraag 6 Buitenruimte ______
- Totaal aantal punten van vraag 7 Fietsenberging ______ + → ______

Totaal ______

Rond het totaal af op hele punten.

Hints bij examen 2017-II

1 Vul de coördinaten van de gegeven punten in de formule in.

2 Uitspraak I: bereken hoe de verhouding is tussen de uitkomsten voor E bij dieren met gewicht G en $10G$.
Uitspraak II: lees voor beide dieren gewicht en energieverbruik af in de figuur.

3 E' kan als een breuk geschreven worden. Bekijk de teller en de noemer om het gedrag van E te beschrijven.

4 Gebruik de rekenregels ${}^{g}\log(ab) = {}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b)$ en ${}^{g}\log(a^{p}) = p \cdot {}^{g}\log(a)$.

5 De automobilist rijdt 100 km maar zijn actieradius neemt niet met 100 km af.

6 Bij vertrek met volle tank geldt $x = 0$. Als de tank leeg is geldt $A = 0$.

7 Differentieer S met de quotiëntregel.

8 f_6 is gegeven. Zoek een verband tussen A_6 en L.

9 Uit de gegevens volgt $f_{12} = A_{12} = 0{,}5L$.

10 Gebruik de rekenregels $g^{-a} = \frac{1}{g^{a}}$ en $g^{ab} = (g^{a})^{b}$.

11 Bereken met beide berekeningswijzen $f_1 + f_2$.

12 Voer in de rekenmachine de recursieve formule van de afstand tussen fret n en fret $n - 1$ in.

13 Bereken met behulp van de rekenmachine voor welke gehele waarden van t de maximumtemperatuur hoger is dan 30 °C.

14 T_{min} kan van de vorm $T_{min} = a + b\sin(c(x - d))$ zijn. Lees de uiterste waarden af in de figuur en bereken hiermee a en b. Gebruik het feit dat de toppen onder elkaar liggen om c en d te bepalen.

15 Hier moet je combinaties tellen.

16 Deze vraag gaat over permutaties.

17 Bereken de adviesdikte bij $t = 3{,}5$ °C en $w = 0$ km/uur. Stel een vergelijking op om dezelfde adviesdikte te krijgen bij $w = 20$.

18 Onderzoek hoe de breuk $\frac{110}{1 + e^{0{,}159(\sqrt{w} - t)}}$ verandert bij stijgende w en gelijkblijvende t.

19 $\sqrt{w} - t$ bepaalt hoe de noemer van de breuk, en daarmee ook de uitkomst van D, zich ontwikkelt.

20 Vul $w = 0$ en $D = 8$ in om t te berekenen. Vul vervolgens de gevonden t en $D = 17$ in om w te berekenen.

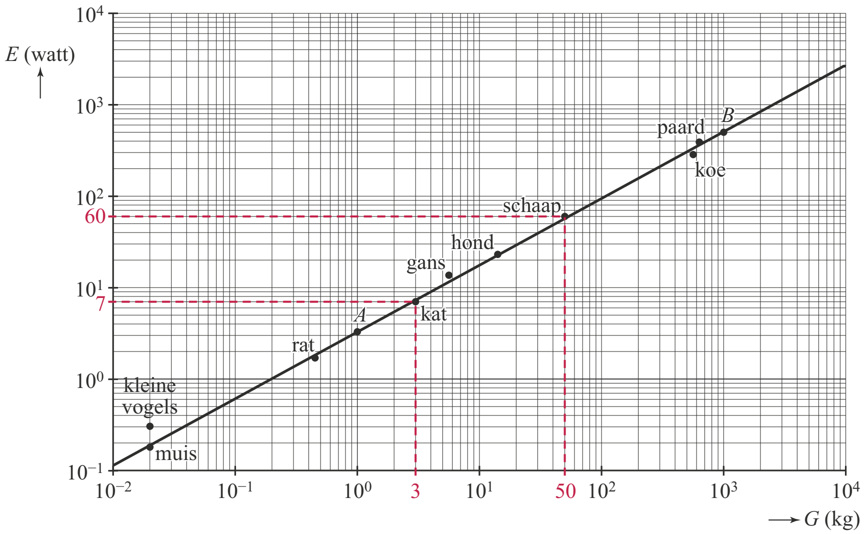
21 Bepaal het aantal punten met het formulier. Het maximale huurbedrag stijgt ieder jaar met 2% dus Het totale maximaal te betalen huurbedrag voor vier jaar kan worden berekend. Nu nagaan hoe een jaarlijkse verhoging met een bedrag x op hetzelfde totaal uitkomt.

Uitwerkingen bij examen 2017-II

Gewicht van dieren

4p **1** De coördinaten van $A(1;\ 3{,}27)$ invullen: $3{,}27 = a \cdot 1^{b} \Leftrightarrow a = 3{,}27$ [1p]
Dan de coördinaten van $B(1000;\ 520)$ invullen: $520 = 3{,}27 \cdot 1000^{b}$ [1p] $\Leftrightarrow$
$\frac{520}{3{,}27} = 1000^{b} \Leftrightarrow b = {}^{1000}\log\left(\frac{520}{3{,}27}\right) = 0{,}7338...$ [1p] dus afgerond $b \approx 0{,}734$. [1p]

5p **2** Het energieverbruik van een dier met gewicht G is $E = 3{,}3 \cdot G^{0{,}73}$.
Een tien keer zo zwaar dier heeft gewicht $10G$ en verbruikt aan energie
$E = 3{,}3 \cdot (10G)^{0{,}73} = 3{,}3 \cdot 10^{0{,}73} \cdot G^{0{,}73} = 10^{0{,}73} \cdot (3{,}3 \cdot G^{0{,}73}) \approx 5{,}37 \cdot (3{,}3 \cdot G^{0{,}73})$ [1p] dus een tien keer zo zwaar dier verbruikt ongeveer 5,37 keer zoveel energie.
Uitspraak I is onwaar. [1p]



Aflezen in de figuur: $G_{kat} = 3$ en $E_{kat} = 7$ dus het energieverbruik van een kat per kilogram lichaamsgewicht is $\frac{E_{kat}}{G_{kat}} = \frac{7}{3} = 2{,}33...$ watt/kg. [1p]
Nu het schaap: $G_{schaap} = 50$ en $E_{schaap} = 60$ dus het energieverbruik van een schaap per kilogram lichaamsgewicht is $\frac{E_{schaap}}{G_{schaap}} = \frac{60}{50} = 1{,}2$ watt/kg. [1p]
Uitspraak II is onwaar. [1p]

3p **3** $E = 3{,}3 \cdot G^{0{,}73} \Rightarrow E' = 3{,}3 \cdot 0{,}73 \cdot G^{0{,}73-1} \Leftrightarrow E' = 2{,}409 \cdot G^{-0{,}27} \Leftrightarrow E' = \frac{2{,}409}{G^{0{,}27}}$ [1p]
Zowel de teller als de noemer van E' zijn positief, dus E stijgt. [1p]
De noemer $G^{0{,}27}$ stijgt als G toeneemt, en dan daalt de uitkomst van de breuk $\frac{2{,}409}{G^{0{,}27}} \Rightarrow$
E is afnemend stijgend. [1p]

4p **4** $\log(E) = \log(3{,}3 \cdot G^{0{,}73})$ [1p] $= \log(3{,}3) + \log(G^{0{,}73})$ [1p] $= \log(3{,}3) + 0{,}73 \cdot \log(G)$ [1p]
dus $p = \log(3{,}3) = 0{,}518... \approx 0{,}52$ en $q = 0{,}73$ [1p]

Zuiniger rijden

3p **5** De automobilist rijdt 100 km [1p] maar zijn actieradius neemt af met 625 – 539 = 86 km. [1p]
Door zuinig te rijden 'wint' hij 14 km op dit traject. [1p]

4p **6** Bij een volle tank is de actieradius $A(0) = 5000 \cdot \frac{5000 - 7{,}2 \cdot 0}{40\,000 - 3 \cdot 0} = 625$ km. [1p]

Als de tank leeg is, is de actieradius nul dus:

$A(x) = 5000 \cdot \frac{5000 - 7{,}2 \cdot x}{40\,000 - 3 \cdot x} = 0$ [1p] $\Leftrightarrow 5000 - 7{,}2 \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{5000}{7{,}2} = 694{,}4...$ km [1p]

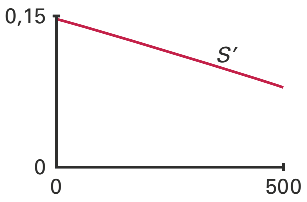
Volgens dit model kan de automobilist met een volle tank ruim 69 km meer rijden dan bij vertrek op het bedieningspaneel staat aangegeven. [1p]

5p **7** $S(x) = x + A(x) = x + 5000 \cdot \frac{5000 - 7{,}2x}{40\,000 - 3x}$ differentiëren met de quotiëntregel:

$S'(x) = 1 + 5000 \cdot \frac{(40\,000 - 3x) \cdot (-7{,}2) - (5000 - 7{,}2x) \cdot (-3)}{(40\,000 - 3x)^2}$ [3p]

Voer nu in de rekenmachine in $y_1 = 1 + 5000 \cdot \frac{(40\,000 - 3x) \cdot (-7{,}2) - (5000 - 7{,}2x) \cdot (-3)}{(40\,000 - 3x)^2}$.

Een schets van de grafiek: [1p]



De grafiek van de afgeleide is positief op [0, 500] dus S stijgt. Dat betekent dat de 'kilometerwinst' voortdurend toeneemt. [1p]

Gitaar

4p **8** De afstand tussen fret nummer 6 en de brug is 20 cm dus $A_6 = L - 20$. [1p]
Omdat ook $A_6 = L \cdot 0{,}9439^6$ geldt $L - 20 = L \cdot 0{,}9439^6$ [1p] $\Leftrightarrow L - L \cdot 0{,}9439^6 = 20 \Leftrightarrow$

$L \cdot (1 - 0{,}9439^6) = 20 \Leftrightarrow L = \frac{20}{(1 - 0{,}9439^6)}) = 68{,}31...$ [1p] $\Rightarrow$

afgerond is de lengte van een snaar van deze gitaar 68 cm. [1p]
De vergelijking $L - 20 = L \cdot 0{,}9439^6$ mag met de rekenmachine worden opgelost.

4p **9** Noem de groeifactor g, dus de formule is dan $A_n = L \cdot g^n$.
De 12e fret ligt precies midden tussen de brug en de kam dus $A_{12} = 0{,}5L$. [1p]

Omdat ook $A_{12} = L \cdot g^{12}$ geldt $0{,}5L = L \cdot g^{12} \Leftrightarrow 0{,}5 = g^{12}$ [1p] $\Leftrightarrow g = (0{,}5)^{\frac{1}{12}} = 0{,}943874...$ [1p]

Afgerond op vijf decimalen is de groeifactor 0,94387. [1p]

3p **10** $A_n = \frac{L}{2^{\left(\frac{n}{12}\right)}} = L \cdot 2^{-\left(\frac{n}{12}\right)}$ [1p] $= L \cdot 2^{-\frac{1}{12}n} = L \cdot \left(2^{-\frac{1}{12}}\right)^n$ [1p] $= L \cdot (0{,}943874...)^n \approx$
$L \cdot 0{,}9439^n$ [1p]

4p **11** De afstand $f_1 + f_2$ tussen de brug en fret 2 kan berekend worden met de formule:
$f_1 + f_2 = L - A_2 = 65 - 65 \cdot 0{,}9439^2 = 7{,}0884...$ cm. [1p]

De 'Regel van 18' geeft: $f_1 = \frac{65}{18}$ en $f_2 = \frac{17}{18} \cdot f_1$ [1p] $= \frac{17}{18} \cdot \frac{65}{18} = \frac{1105}{324}$ dus

$f_1 + f_2 = \frac{65}{18} + \frac{1105}{324} = \frac{2275}{324} = 7{,}0216...$ cm. [1p]

Het verschil tussen beide berekeningswijzen is (7,0884...) – (7,0216...) = 0,0668... cm.

Afgerond op tienden van mm is dat 0,07 cm of 0,7 mm. [1p]

4p **12** Voer in de rekenmachine de recursieve formule van de afstand tussen fret n en fret $n - 1$ in. Voor deze gitaar geldt $L = 65$ cm.

nMin = 1
$u(n) = \frac{17}{18} \cdot u(n-1)$
$u(n\text{Min}) = \frac{65}{18}$ [1p]

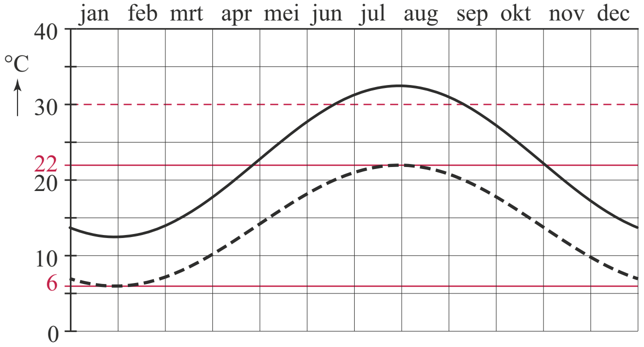
Een stukje van de bijbehorende tabel: [1p]

n	u(n)
15	1,6222
16	1,5321
17	1,447

Vanaf de 15e fret is de afstand tot de volgende fret kleiner dan 1,6 cm. [2p]

Pythagorion

3p **13** Voer in de rekenmachine in $y_1 = 22{,}5 + 10\sin(0{,}0172(x - 120))$ en $y_2 = 30$. [1p]
Intersect/snijpunt geeft $x = 169{,}3...$ en $x = 253{,}4...$ dus op dag $t = 170$ is de maximumtemperatuur voor het eerst hoger dan 30 °C. Op dag 253 gebeurt dat voor het laatst. [1p]
Het aantal dagen met een maximumtemperatuur boven 30 °C is 253 – 169 = 84. [1p]
De formule bestaat alleen voor gehele waarden van t.



4p **14** Een mogelijke formule van de minimumtemperatuur is van de vorm $T_{min} = a + b\sin(c(x-d))$.
c bepaalt de periode. Als de toppen van T_{max} en T_{min} onder elkaar liggen hebben ze dezelfde periode, dus ook dezelfde $c = 0{,}0172$.
d bepaalt de horizontale verplaatsing. Als de toppen van T_{max} en T_{min} onder elkaar liggen hebben ze ook dezelfde $d = 120$. [1p]
Aflezen in de figuur: het minimum van T_{min} is 6 en het maximum van T_{min} is 22 [1p]
dus de evenwichtsstand $a = \frac{6+22}{2} = 14$ en de amplitude $b = \frac{22-6}{2} = 8$. [1p]
Een formule voor de minimumtemperatuur is: $T_{min} = 14 + 8\sin(0{,}0172(x-120))$ [1p]

3p **15** Er zijn $\binom{14}{2} = 91$ verschillende mogelijkheden om twee van de veertien stellen in Nikos Place te plaatsen. [1p]
Daarna zijn er $\binom{12}{5} = 792$ verschillende mogelijkheden om vijf van de resterende twaalf stellen in Hydrele Beach te plaatsen. [1p]
De overige zeven stellen gaan allemaal naar Kouros Bay. Dat kan maar op 1 manier.
De 14 stellen kunnen op $91 \cdot 792 \cdot 1 = 72\,072$ manieren over de drie hotels verdeeld worden. [1p]

3p **16** De vijf fietstochten kunnen op 5! = 120 volgordes over de vijf dagen verdeeld worden. [1p]
Voor een selectie van drie van de vijf wandeltochten zijn 5P3 = 60 volgordes [1p] (het aantal permutaties van 3 uit 5).
andere manier voor 3 van de 5 wandeltochten: 5 · 4 · 3 = 60 volgordes.
Voor deze acht dagen kan het stel 120 · 60 = 7200 verschillende programma's maken. [1p]

Nooit meer koude benen

4p **17** Bij $t = 3{,}5$ °C en $w = 0$ km/uur is $D = 110 - \frac{110}{1+e^{0{,}159(\sqrt{0}-3{,}5)}} = 40{,}07...$ dus de adviesdikte is dan 40 denier. [1p]
w stijgt naar 20 en de adviesdikte blijft gelijk: $40 = 110 - \frac{110}{1+e^{0{,}159(\sqrt{20}-t)}}$. [1p]
Voer in de rekenmachine in $y_1 = 110 - \frac{110}{1+e^{0{,}159(\sqrt{20}-x)}}$ en $y_2 = 40$.
De optie *intersect/snijpunt* geeft $x = 7{,}99...$ [1p] dus bij 8 °C en windsnelheid 20 km/uur is de adviesdikte ook 40 denier.
Voor dezelfde adviesdikte moet het 4,5 °C graden warmer worden. [1p]

4p **18** t is nu constant. Als w stijgt, dan stijgt $\sqrt{w}$ [1p], dus ook de noemer $1 + e^{0{,}159(\sqrt{w}-t)}$ stijgt. [1p]
Maar dan daalt de uitkomst van de breuk $\frac{110}{1+e^{0{,}159(\sqrt{w}-t)}}$ [1p] waardoor de uitkomst van $D = 110 - \frac{110}{1+e^{0{,}159(\sqrt{w}-t)}}$ uiteindelijk stijgt.
Als de windsnelheid stijgt en de temperatuur gelijk blijft, neemt de waarde van D toe. [1p]

3p **19** Als $\sqrt{w} - t$ heel groot wordt (bijvoorbeeld veel wind en temperatuur onder nul), wordt ook de noemer $1 + e^{0{,}159(\sqrt{w}-t)}$ heel groot, en dan daalt de breuk $\frac{110}{1+e^{0{,}159(\sqrt{w}-t)}}$ naar nul, dus dan stijgt D naar 110. [1p]
$\sqrt{w} - t$ kan ook sterk negatief worden (bijv $w = 0$ en hoge temperatuur). Dan daalt de noemer $1 + e^{0{,}159(\sqrt{w}-t)}$ naar 1 dus dan daalt D naar 0. [1p]
De mogelijke uitkomsten voor D liggen tussen 0 en 110. [1p]

4p **20** Carol koos bij $w = 0$ voor een panty met $D = 8$ denier $\Rightarrow$ $8 = 110 - \frac{110}{1+e^{0{,}159(\sqrt{0}-t)}}$
Voer in de rekenmachine in $y_1 = 110 - \frac{110}{1+e^{-0{,}159x}}$ en $y_2 = 8$.
De optie *intersect/snijpunt* geeft $x = 16{,}00...$ [1p] dus bij 16 °C en windstil weer is de adviesdikte 8 denier. [1p]
Later is bij dezelfde temperatuur de adviesdikte 17 denier: $17 = 110 - \frac{110}{1+e^{0{,}159(\sqrt{w}-16)}}$
Voer in de rekenmachine in $y_1 = 110 - \frac{110}{1+e^{0{,}159(\sqrt{x}-16)}}$ en $y_2 = 17$.
De optie *intersect/snijpunt* geeft $x = 28{,}21...$ [1p] dus de windsnelheid was toen 28 km/uur. [1p]

Kamerhuur

7p **21** Alle gegevens invullen op het formulier (zie volgende bladzijden). [2p]
Het totaal aantal punten is $p = 189$.
Voor het eerste jaar geldt $H_{max} = 1{,}06 \cdot 189 + 178{,}20 = 378{,}54$ euro per maand. [1p]
Voor elk jaar daarna wordt H_{max} met 2% verhoogd, dus H_{max} wordt vermenigvuldigd met factor 1,02.
Het totaal te betalen bedrag aan huur voor vier jaar is in dit geval:
$12 \cdot (378{,}54 + (378{,}54 \cdot 1{,}02) + (378{,}54 \cdot 1{,}02^2) + (378{,}54 \cdot 1{,}02^3)) \approx 18\,722{,}32$ euro. [1p]
Nu verhoogt de huisbaas de huur van 375 euro jaarlijks met een bedrag x.
Het totaal te betalen bedrag aan huur voor vier jaar komt dan uit op:
$12 \cdot (375 + (375 + x) + (375 + 2x) + (375 + 3x)) = 12 \cdot (1500 + 6x)$ [1p]
Dit bedrag mag maximaal gelijk zijn aan 18 722,32 dus
$12 \cdot (1500 + 6x) = 18\,722{,}32 \Leftrightarrow 18\,000 + 72x = 18\,722{,}32 \Leftrightarrow 72x = 722{,}32 \Leftrightarrow$
$x = 10{,}03...$ [1p]
De huisbaas mag de maandelijkse huur ieder jaar met maximaal € 10,03 verhogen. [1p]

Puntentelling: onzelfstandige woonruimte

Oppervlakte vertrekken

1. Wat is de oppervlakte van de vertrekken?

Eigen ruimtes:		Oppervlakte in m²		Punten
☐ Kamers		28		
☐ Keuken			+	
☐ Totaal		28	x 5 =	140

Gemeenschappelijke ruimtes indien samen groter dan 15 m²:

☐ Kamers				
☐ Keuken			+	
Subtotaal	A	0		
Aantal wooneenheden	B	4		
Deel de uitkomst van A door de uitkomst van B		0	x 5 =	0

Centrale verwarming

2.1 Hoe groot zijn de verwarmde vertrekken?

	Oppervlakte in m²		Punten
☐ Eigen kamers	28		
☐ Eigen keuken		+	
Totaal	28	x 0,75 =	21

2.2 Heeft u geen cv, maar wel een gasaansluiting en een schoorsteen/rookgasafvoer?

☐ Ja, 3 punten invullen

Keuken

3 Welke voorzieningen heeft de keuken?

		Punten
☐ Aparte eigen keuken	20 punten invullen	
☐ Eigen keuken in woonkamer of in gemeenschappelijke kamer	10 punten invullen	
☐ Gemeenschappelijke keuken	4 punten invullen	4

Toilet

4 Wat voor toilet heeft de woning?

		Punten
☐ Eigen toilet	12 punten invullen	
☐ Gemeenschappelijk toilet	2 punten invullen	2

©ThiemeMeulenhoff

Badkamer

5 Wat voor badkamer heeft de woning?

		Punten
☐ Eigen douche of bad	15 punten invullen	
☐ Gemeenschappelijke douche of bad	3 punten invullen	3
☐ Eigen wastafel	10 punten invullen	10
☐ Gemeenschappelijke wastafel in afsluitbare ruimte	2 punten invullen	

Buitenruimte

6 Beschikt de woning over een buitenruimte, zoals een balkon, tuin, terras of plaatsje?

Eigen buitenruimte		Punten
☐ 4 tot 10 m²	3 punten invullen	
☐ meer dan 10 m²	9 punten invullen	
Gemeenschappelijke buitenruimte		
☐ 4 tot 10 m²	2 punten invullen	
☐ meer dan 10 m²	6 punten invullen	6

Fietsenberging

7 Beschikt de woning over een fietsenberging?

		Punten
☐ Eigen fietsenberging	6 punten invullen	
☐ Gemeenschappelijke fietsenberging	3 punten invullen	3

Totaal

8 Totaal aantal punten

Totaal aantal punten van vraag 1 Oppervlakte vertrekken	140	
Totaal aantal punten van vraag 2 Centrale verwarming	21	
Totaal aantal punten van vraag 3 Keuken	4	
Totaal aantal punten van vraag 4 Toilet	2	
Totaal aantal punten van vraag 5 Badkamer	13	
Totaal aantal punten van vraag 6 Buitenruimte	6	
Totaal aantal punten van vraag 7 Fietsenberging	3 +	
	→	189

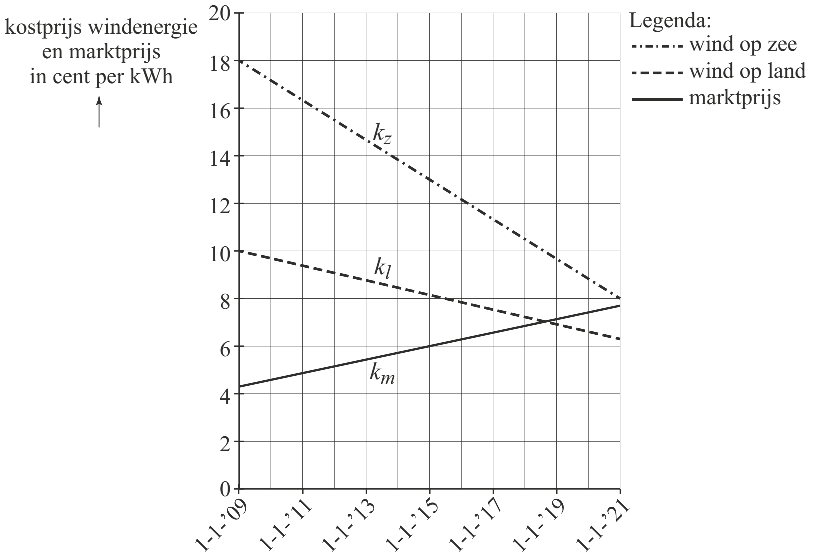
Totaal 189
Rond het totaal af op hele punten.

©ThiemeMeulenhoff

Examen 2018-I

Windenergie

In een krant stond eind 2013 bij een artikel over de toekomst van windenergie de onderstaande figuur. In de figuur wordt de kostprijs voor het produceren van windenergie vergeleken met de kosten voor het produceren van energie in een traditionele kolencentrale (de marktprijs).



De grafieken zijn gebaseerd op een model van de werkelijkheid. Met behulp van dit model is het mogelijk om op ieder willekeurig tijdstip de kostprijs van energie uit te rekenen.

De formule voor de marktprijs k_m luidt:

$k_m = 0,28 \cdot t + 4,3$

De formule voor de kostprijs van windenergie k_l van windmolens op land luidt:

$k_l = -0,31 \cdot t + 10,0$

Voor beide formules geldt: k is de prijs in cent per kWh (kilowattuur) en t is de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2009.

We nemen in deze opgave aan dat de prijzen zich ook na 2020 volgens deze lineaire verbanden blijven ontwikkelen.

Door de duurdere windmolens op zee is de kostprijs van windenergie van die windmolens op dit moment nog steeds hoger dan die van windmolens op land. Maar door de voortdurende innovaties gaat dat veranderen.

5p **1** Stel met behulp van de figuur een formule op voor de kostprijs k_z van windenergie van windmolens op zee en bereken daarmee in welk jaar de windenergie van land en die van zee evenveel kosten.

Rond 2011 was de kostprijs van windenergie van windmolens op land nog tweemaal zo hoog als de marktprijs.

4p **2** Bereken in welk jaar de marktprijs tweemaal zo hoog zal zijn als de kostprijs van windenergie van windmolens op land.

In 2009 werd er in totaal 23,4 miljoen MWh energie door kolencentrales geproduceerd (1 MWh is 1 megawattuur, dat is 1000 kWh). De overheid heeft als doelstelling dat op den duur alle energie duurzaam moet worden geproduceerd. Energie die in kolencentrales wordt geproduceerd valt niet onder duurzaam geproduceerde energie.

We willen nu een model maken voor de totale kosten *TK* van de door kolencentrales geproduceerde energie in de jaren 2009-2050. Daarvoor doen we twee aannames:

1. De totale hoeveelheid energie *TE* die per jaar door kolencentrales geproduceerd wordt, neemt lineair af van 23,4 miljoen MWh in 2009 tot 0 MWh in 2050. Er geldt dan:

   $$TE = 23,4 - \frac{23,4}{41} \cdot j$$

   In deze formule is *TE* in miljoenen MWh en j in jaren met $j = 0$ het jaar 2009. Bovendien is j een geheel getal.
2. Om de totale kosten *TK* van energie te berekenen in een bepaald jaar, gebruiken we de gemiddelde marktprijs g_m in euro per MWh in dat jaar. Er geldt:

   $g_m = 2,8 \cdot j + 44,4$

   In deze formule is g_m in euro per MWh en j in jaren met $j = 0$ het jaar 2009. Ook nu is j een geheel getal.

De totale kosten *TK* in een bepaald jaar zijn te berekenen door de door kolencentrales geproduceerde energie te vermenigvuldigen met de gemiddelde marktprijs in dat jaar. De formule voor TK is te schrijven als $TK = a \cdot j^2 + b \cdot j + c$.
In deze formule is *TK* in miljoenen euro's en j in jaren met $j = 0$ het jaar 2009 en is j een geheel getal.

4p **3** Bereken de waarden van a, b en c in deze formule. Rond je antwoorden af op één decimaal.

Shannon-index

De Shannon-index H is een maat voor de diversiteit (verscheidenheid) van een dieren- of plantenpopulatie in een gebied. Hoe hoger de Shannon-index, hoe groter de diversiteit.
We kijken naar een gebied met twee soorten bomen. De formule voor de Shannon-index is dan:

$$H = -(p_1 \ln(p_1) + p_2 \ln(p_2))$$

waarin p_1 en p_2 de aandelen van elke soort binnen het gebied zijn. Er geldt bijvoorbeeld dat $p_1 = 0{,}37$ als 37% van de bomen uit soort 1 bestaat.

Bos A bestaat voor 70% uit eiken en voor 30% uit beuken en bos B bestaat voor 90% uit eiken en voor 10% uit beuken.

3p **4** Onderzoek met de formule voor H van welk van beide bossen de Shannon-index het grootst is.

In een bos met twee soorten bomen, eiken en beuken, geldt: als p het aandeel eiken is, is het aandeel beuken gelijk aan $1 - p$. De formule voor de Shannon-index kan dan geschreven worden als:

$$H = -(p \ln(p) + (1 - p) \ln(1 - p))$$

3p **5** Onderzoek met de grafische rekenmachine tot welke waarde de Shannon-index nadert als het aandeel eiken in het bos steeds kleiner wordt.

Met behulp van de afgeleide van H kunnen we onderzoeken bij welke verhouding eiken en beuken de Shannon-index maximaal is.
Er geldt:

$$\frac{dH}{dp} = -\ln(p) + \ln(1 - p)$$

4p **6** Bereken met behulp van $\frac{dH}{dp}$ voor welke percentages eiken en beuken de Shannon-index H van het bos maximaal is.

Bitcoins

De bitcoin is een digitale munteenheid die alleen online bestaat. Hij bestaat sinds 1 januari 2009 en kan worden gebruikt om te betalen in webwinkels of voor andere online diensten.

Bitcoins worden niet, zoals normaal geld, door een centrale bank in omloop gebracht. In plaats daarvan zijn alle bitcoins die in omloop zijn, gecreëerd door computers mee te laten werken aan oplossingen van geselecteerde wiskundige problemen. Dat werkt als volgt:
Iedereen kan op zijn of haar computer speciale software laten draaien die meewerkt aan het oplossen van zo'n wiskundig probleem. De eigenaar van de computer die de oplossing voor een probleem vindt, krijgt daarvoor 25 (nieuw gecreëerde) bitcoins als beloning. Omdat er in 2014 iedere 10 minuten zo'n probleem werd opgelost, werden er op deze manier iedere 10 minuten 25 bitcoins in omloop gebracht.

Op 1 januari 2014 waren er (ongeveer) 12,2 miljoen bitcoins in omloop.

3p **7** Bereken uitgaande hiervan in welk jaar het aantal bitcoins in omloop boven de 18 miljoen uitstijgt als de snelheid waarmee bitcoins in omloop gebracht worden niet verandert.

In werkelijkheid blijft de snelheid waarmee bitcoins in omloop worden gebracht niet gelijk aan 25 bitcoins per 10 minuten. Deze snelheid neemt namelijk af. Gedurende de eerste vier jaar, van 1 januari 2009 tot 1 januari 2013, was de beloning per oplossing nog 50 bitcoins. De beloning voor het vinden van een oplossing wordt elke vier jaar gehalveerd: van 1 januari 2013 tot 1 januari 2017 is de beloning per oplossing 25 bitcoins, voor de vier jaar erna 12,5 bitcoins per oplossing enzovoorts.

4p **8** Bereken vanaf welk jaar de beloning per oplossing minder dan één bitcoin zal zijn.

Het totale aantal bitcoins dat in omloop gebracht kan worden, is begrensd.
Dat is een gevolg van (onder andere) het feit dat de beloning per oplossing steeds gehalveerd wordt. Het **totale** aantal bitcoins dat in omloop is, kan worden benaderd met de formule:

$$C = 21 - 21 \cdot 0{,}5^{0{,}25 \cdot t}$$

Hierin is C het totale aantal bitcoins in miljoenen en t de tijd in jaren met $t = 0$ op 1 januari 2009.

3p **9** Bepaal met behulp van een redenering aan de hand van de formule de grenswaarde van het totale aantal bitcoins dat in omloop is.

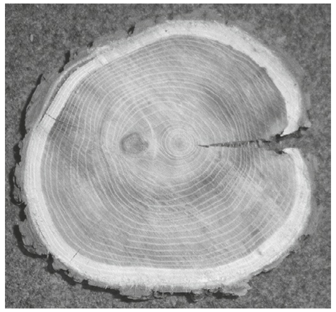
Om het totale aantal bitcoins dat in omloop is te reguleren, wordt niet alleen het aantal bitcoins per oplossing kleiner gemaakt, maar wordt ook de moeilijkheidsgraad van de wiskundige problemen steeds groter gemaakt. Er zijn namelijk steeds meer mensen die hun computers mee laten rekenen.
De moeilijkheidsgraad van de problemen stijgt exponentieel volgens de formule $D = 3{,}65 \cdot e^{0{,}533 \cdot t}$.
Hierin is D een maat voor de moeilijkheidsgraad en t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 januari 2013. Hierbij geldt dat hoe groter D is, hoe moeilijker het op te lossen probleem is.

4p **10** Stel de formule van de afgeleide van D op en beredeneer hoe je aan deze formule kunt zien dat de grafiek van D toenemend stijgend is.

De formule kan zó worden herschreven dat je een moeilijkheidsgraad kunt invullen en zo de tijd in maanden kunt berekenen die nodig is om die moeilijkheidsgraad te bereiken.

4p **11** Herschrijf de formule $D = 3{,}65 \cdot e^{0{,}533 \cdot t}$ zó dat t wordt uitgedrukt in D.

Jaarringen



Op de foto zie je een doorgezaagde boomstam. Hierin zijn zogenaamde jaarringen te zien. Deze ontstaan doordat de boom in de zomer snel groeit: dan wordt er licht gekleurd hout gevormd. In de winter groeit de boom langzaam en wordt er donker gekleurd hout gevormd. Zo komt er elk jaar een ring bij, die uit een licht en een donker gedeelte bestaat: een jaarring.

In deze opgave kijken we eerst naar de groeisnelheid van de diameter (G) van een grove den. Omdat een boom afwisselend snel en langzaam groeit, kun je deze groeisnelheid modelleren met behulp van sinusoïden.

Voor de groeisnelheid van de diameter van een grove den gelden de volgende eigenschappen:

- de groeisnelheid is drie maanden na het ontkiemen van het zaadje maximaal;
- de groeisnelheid is negen maanden na het ontkiemen minimaal;
- dit patroon herhaalt zich elk jaar;
- de maximale groeisnelheid is 2,1 cm per jaar;
- de minimale groeisnelheid is 0,3 cm per jaar.

Voor de groeisnelheid van de grove den kun je op basis van deze eigenschappen een formule opstellen van de vorm $G = a + b\sin(c(t - d))$.
Hierin is G de groeisnelheid in cm per jaar en t de tijd in jaren na het ontkiemen.

4p **12** Bereken de waarden van a, b, c en d in deze formule. Licht je antwoord toe.

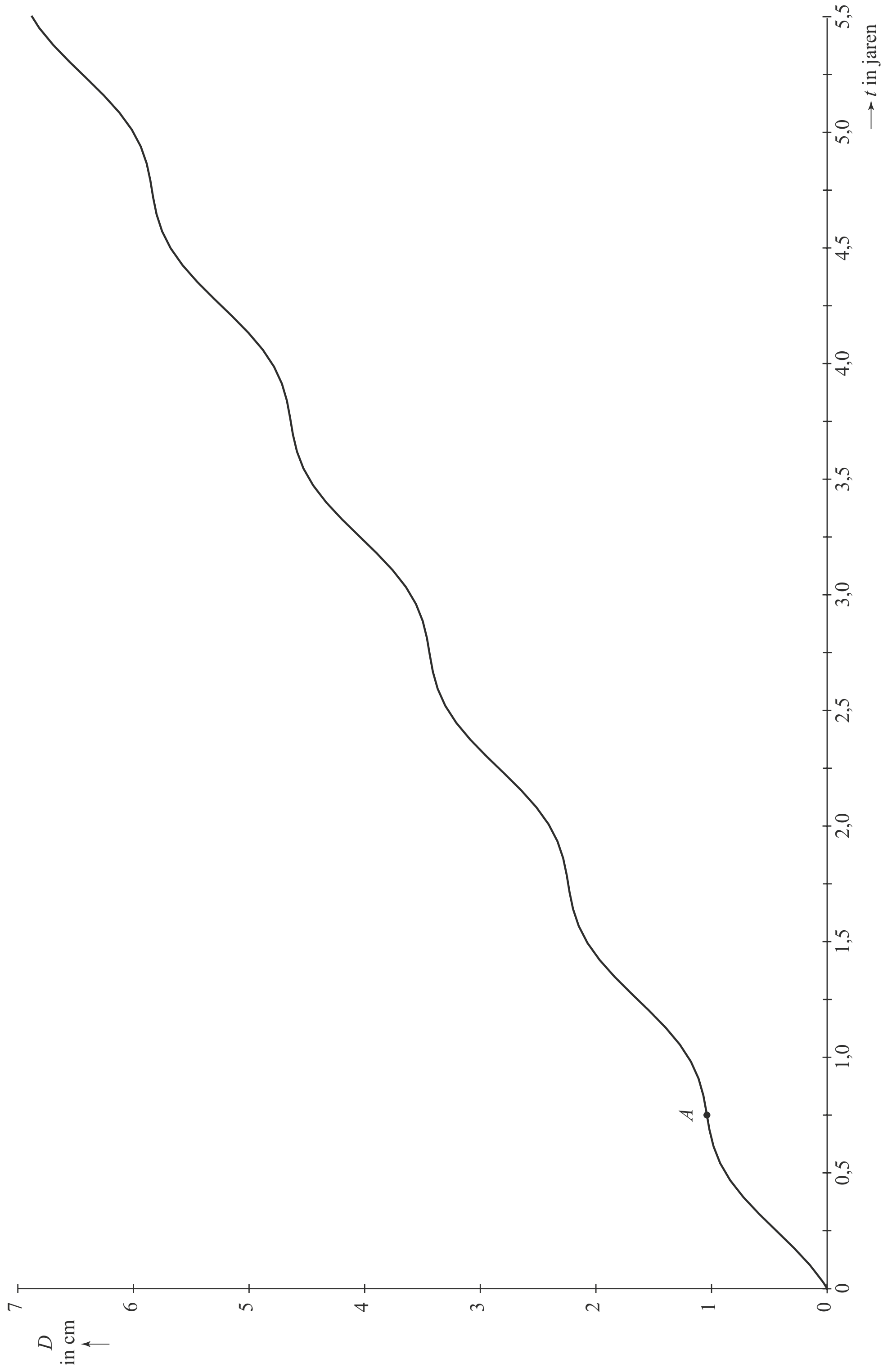
Nu bekijken we de diameter van de stam van deze grove den. Daarbij kan de volgende formule worden opgesteld:

$D = 1{,}2t + 0{,}14 + 0{,}14\sin(2\pi(t - 0{,}25))$

Hierin is D de diameter van de stam in cm en t de tijd in jaren na het ontkiemen met $t = 0$ op het moment van ontkiemen.

De grafiek van D is in de uitwerkbijlage getekend.

uitwerkbijlage bij vraag 16



3p **13** Bereken met behulp van de formule op welk tijdstip de diameter een dikte van 5 cm bereikt. Rond je antwoord af op hele maanden.

In de grafiek is te zien dat de diameter schommelt rondom een lijn. De formule van deze lijn is $T = 1{,}2t + 0{,}14$.
In plaats van de diameter te berekenen met de formule voor D is deze ook te benaderen met behulp van de formule van de lijn. Deze benadering zal in de meeste gevallen iets afwijken van de diameter volgens de formule van D.

3p **14** Onderzoek hoe groot deze afwijking maximaal kan zijn.

De diameter van de grove den groeit in de eerste zes maanden na het ontkiemen meer dan in de tweede zes maanden na het ontkiemen. Dat wisselen van groeisnelheid herhaalt zich zo in de jaren daarna.

3p **15** Bereken met behulp van de formule van D hoeveel procent van de jaarlijkse groei in de eerste helft van het jaar plaatsvindt. Rond je antwoord af op gehele procenten.

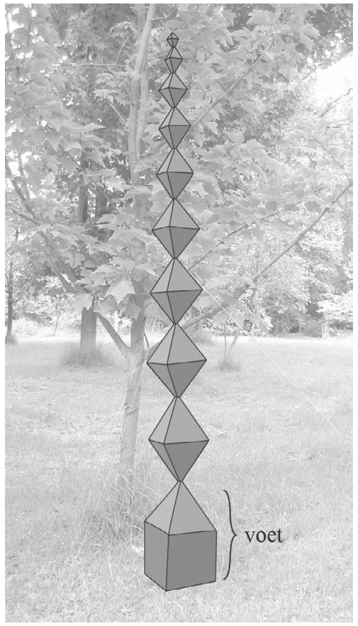
In het begin van deze opgave staat vermeld dat de groeisnelheid van de diameter G na negen maanden ($t = 0{,}75$) minimaal is, namelijk 0,3 cm per jaar. De minimale groeisnelheid bij $t = 0{,}75$ die met de formule van D berekend wordt (zie punt A in de grafiek), is niet precies gelijk aan 0,3 cm per jaar.

3p **16** Geef in de grafiek van D op de uitwerkbijlage nog een ander punt dan punt A aan waar de groeisnelheid volgens de formule van D minimaal is en bereken de minimale groeisnelheid in cm/jaar met de grafische rekenmachine. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Toren van achtvlakken

Op de afbeelding zie je een kunstwerk van Elt de Boer: een toren van regelmatige achtvlakken op een voet. Het bovenste deel van de voet is de helft van een regelmatig achtvlak met daaronder een kubus waarvan de ribbe dezelfde lengte heeft als die van het halve achtvlak. Daarboven zie je negen hele achtvlakken die naar boven toe steeds kleiner worden.

afbeelding

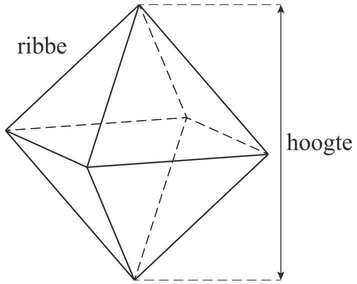


De kunstenaar maakt de voet zwart en van de 9 achtvlakken maakt hij 3 achtvlakken rood, 3 oranje en 3 geel.

4p **17** Bereken op hoeveel manieren de kunstenaar dit kan doen.

Een regelmatig achtvlak, zie de figuur, heeft 12 ribben die allemaal even lang zijn. De ribbe van de voet is 20 cm en die van het bovenste achtvlak is 4 cm.

figuur



De achtvlakken worden naar boven toe steeds kleiner. De kunstenaar kan ervoor kiezen de ribbe van de achtvlakken steeds met een vaste factor r te vermenigvuldigen. Afgerond op twee decimalen geldt dan:

$r = 0{,}84$

3p **18** Bereken de waarde van r in drie decimalen nauwkeurig.

De kunstenaar had er ook voor kunnen kiezen om de ribbe met een vaste lengte te laten afnemen. De lengten van de ribben van de opeenvolgende achtvlakken vormen dan een rekenkundige rij. Deze rij kan benaderd worden met de directe formule in de vorm van een lineaire formule:

$u_n = 20 - 1{,}78n$

Hierin is n het nummer van het achtvlak. In de formule is u_n de lengte in cm van de ribbe van het n-de achtvlak. Bij $n = 0$ hoort de lengte van de ribbe van de voet.

3p **19** Laat zien hoe de lineaire formule $u_n = 20 - 1{,}78n$ afgeleid kan worden uit de gegevens.

De twee methoden zullen in het algemeen verschillende lengtes geven voor de ribben van de achtvlakken uit de serie.

4p **20** Onderzoek bij welk achtvlak uit de serie dit verschil maximaal is en geef ook aan hoe groot dat verschil is. Rond je antwoord af op gehele millimeters.

Sprinttrein

Veel wielerwedstrijden worden beslist in een massasprint. Er zijn ploegen die zich hierin hebben gespecialiseerd. Zij stellen een zogenaamde sprinttrein van zes wielrenners samen, die ervoor moet zorgen dat hun ploeg de wedstrijd wint.

De ploeg Giant-Shimano, met de Duitse sprinter Marcel Kittel, heeft op deze wijze een aantal etappes gewonnen in de Tour de France van 2014.

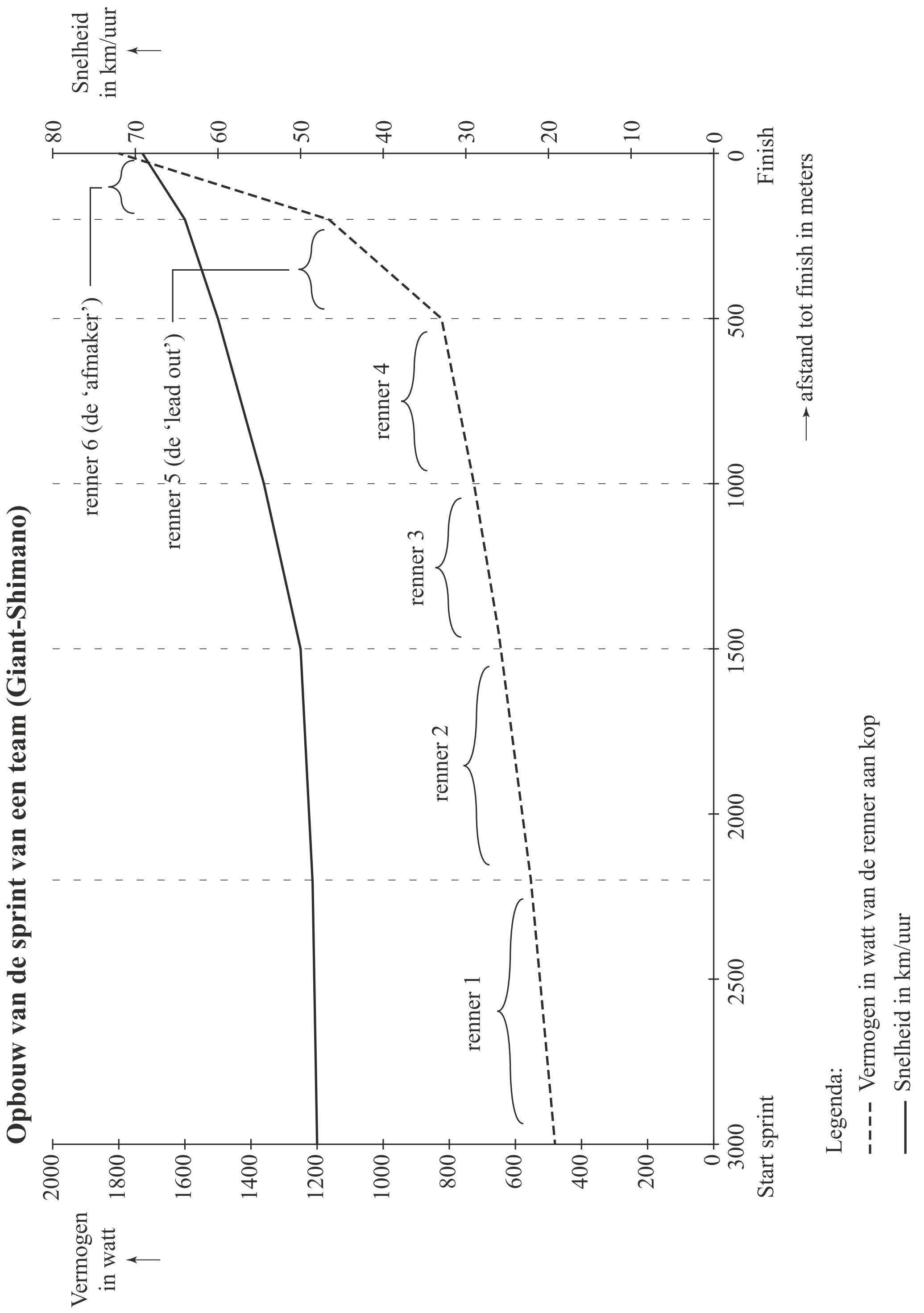
Een sprinttrein werkt als volgt: vanaf drie kilometer voor de finish gaan zes renners van de ploeg om beurten aan kop rijden. Daarbij voeren ze geleidelijk de snelheid op, waarna de zesde renner de taak heeft de massasprint te winnen.

In een krant stond de figuur die op de volgende pagina als uitwerkbijlage is afgebeeld. Hierin is weergegeven welk vermogen en welke snelheid de renners bereiken wanneer zij aan kop rijden.

Met de gegevens uit de figuur is voor iedere renner de geleverde arbeid te berekenen. De arbeid van een renner is gelijk aan het vermogen vermenigvuldigd met de tijdsduur in seconden.
Een wielerliefhebber wil onderzoeken of een renner aan kop aan het eind van de sprint meer, dezelfde of minder arbeid levert dan een renner aan kop aan het begin van de sprint.

7p **21** Voer dit onderzoek uit door vermogens en snelheden te kiezen bij de door jou gekozen renners en maak daarbij gebruik van de uitwerkbijlage.

uitwerkbijlage bij vraag 21



Hints bij examen 2018-I

1 De grafiek is lineair dus de formule is van de vorm $k_z = a \cdot t + b$.

2 Opgelost moet worden de vergelijking $k_m = 2 \cdot k_l$. Dit kan algebraïsch of met de rekenmachine.

3 Uit de gegevens volgt $TK = TE \cdot g_m$. Alles invullen en zonder haakjes schrijven.

4 Vul voor bos A in $p_e = 0{,}7$ en $p_b = 0{,}3$. Net zo voor bos B.

5 Plot de grafiek voor $0 \leq p \leq 1$.

6 H is maximaal als $\frac{\Delta H}{\Delta p}$. Oplossen kan algebraïsch of met de rekenmachine.

7 Bereken hoeveel minuten het duurt om tot 18 miljoen te komen. Dit antwoord omrekenen naar jaren.

8 De rij van beloningen per oplossing halveert per vier jaar, dus hierbij hoort een meetkundige rij.

9 Als $0 < g < 1$ daalt de grafiek van $y = g^t$ naar nul als t steeds groter wordt.

10 Als $g > 1$ stijgt de grafiek van $y = g^t$ voor elke waarde van t.

11 Gebruik de rekenregels voor logaritmen (zie formulekaart).

12 Evenwichtsstand = $\frac{maximum + minimum}{2}$; amplitude = $\frac{maximum - minimum}{2}$;
$c = \frac{2\pi}{periode}$ en d geeft aan voor welke waarde van t de grafiek van G stijgend door de evenwichtsstand gaat.

13 Gebruik de optie *intersect/snijpunt* op de rekenmachine.

14 Stel een formule op voor het verschil $D - T$ en beredeneer of bereken de extreme waarde van dit verschil.

15 Bereken de dikte van de boom na een halfjaar en na een heel jaar.

16 Het gewenste punt kan getekend worden met behulp van evenwijdige raaklijnen. Het is ook mogelijk om de periodiciteit van een deel van formule D te gebruiken. De berekening mag op de rekenmachine worden uitgevoerd.

17 Kies eerst drie van de negen achtvlakken om rood te maken. Kies daarna drie van de resterende vlakken om oranje te maken.

18 Vanaf de voet gerekend moet de ribbe 9 maal met r worden vermenigvuldigd om de ribbe van het bovenste achtvlak te vinden.

19 In negen gelijke stappen neemt de lengte van de ribben af van 20 naar 4 cm.

20 Stel een formule op bij de meetkundige rij. Voer de formules van beide rijen in de rekenmachine in en zoek in een tabel naar het grootste verschil.

21 De vraag gaat over de renners 1 en 6. Zowel het vermogen als de snelheid van de renner op kop neemt lineair toe. Bereken met behulp van de grafiek het gemiddeld vermogen en de gemiddelde snelheid van de renner op kop. Lees van beide renners af hoeveel meter ze op kop rijden. Bereken hoeveel seconden de beide renners op kop rijden.

Uitwerkingen bij examen 2018-I

Windenergie

5p **1** Aflezen in de figuur:
- op 1-1-'09 ($t = 0$) is $k_z = 18$
- op 1-1-'21 ($t = 12$) is $k_z = 8$ [1p]

De helling (richtingscoëfficiënt) van de grafiek van k_z is $\frac{\Delta k}{\Delta t} = \frac{8 - 18}{12} = \frac{-10}{12} = -\frac{5}{6}$. [1p]

Het startgetal is 18, dus de formule is $k_z = -\frac{5}{6} \cdot t + 18$ of $k_z = -0{,}83... \cdot t + 18$. [1p]

Snijpunt van k_z en k_l berekenen:

$-0{,}83... \cdot t + 18 = -0{,}31 \cdot t + 10 \Leftrightarrow -0{,}52... \cdot t = -8{,}0 \Leftrightarrow t = \frac{-8{,}0}{-0{,}52...} = 15{,}28...$ [1p]

Ongeveer 15,3 jaar na 1-1-'09 zal de windenergie van het land evenveel kosten als die van zee. Dat is in het jaar 2024. [1p]

4p **2** Opgelost moet worden de vergelijking $k_m = 2 \cdot k_l$ [1p] $\Rightarrow$
$0{,}28 \cdot t + 4{,}3 = 2 \cdot (-0{,}31 \cdot t + 10)$ [1p] $\Leftrightarrow 0{,}28 \cdot t + 4{,}3 = -0{,}62 \cdot t + 20 \Leftrightarrow$
$0{,}90 \cdot t = 15{,}7 \Rightarrow t = \frac{15{,}7}{0{,}90} = 17{,}44...$ [1p]

Ongeveer 17,4 jaar na 1-1-'09 zal de marktprijs tweemaal zo hoog zijn als de prijs van windenergie van molens op land. Dat is in het jaar 2026. [1p]

4p **3** Uit de gegevens volgt $TK = TE \cdot g_m$ dus

$TK = (23{,}4 - \frac{23{,}4}{41} \cdot j) \cdot (2{,}8 \cdot j + 44{,}4)$ [1p] $= 65{,}52 \cdot j + 1038{,}69 - 1{,}59... \cdot j^2 - 25{,}34... \cdot j$

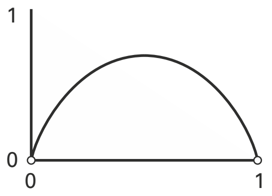
$\Rightarrow TK = -1{,}59... \cdot j^2 + 40{,}17... \cdot j + 1038{,}96$

Afgerond op één decimaal: $a = -1{,}6$ [1p]; $b = 40{,}2$ [1p] en $c = 1039{,}0$. [1p]

Shannon-index

3p **4** Bos A heeft 70% eiken dus $p_e = 0{,}7$ en verder 30% beuken dus $p_b = 0{,}3$.
De Shannon-index van bos A is
$H = -(p_e \ln(p_e) + p_b \ln(p_b)) = -(0{,}7\ln(0{,}7) + 0{,}3\ln(0{,}3)) = 0{,}61...$ [1p]
Bos B heeft 90% eiken dus $p_e = 0{,}9$ en verder 10% beuken dus $p_b = 0{,}1$.
De Shannon-index van bos B is $H = -(0{,}9\ln(0{,}9) + 0{,}1\ln(0{,}1)) = 0{,}32...$ [1p]
De Shannon-index is het grootst in bos A. [1p]

3p **5** Voer in de rekenmachine in $y_1 = -(x\ln(x) + (1 - x)\ln(1 - x))$ en plot voor $0 \leq x \leq 1$.
Dit geeft de volgende grafiek te zien: [1p]



Als het aandeel eiken steeds kleiner wordt, daalt x naar 0. [1p] In de grafiek is te zien dat y ook naar nul daalt als x naar nul daalt, dus als het aandeel eiken naar nul daalt, zal ook de Shannon-index naar nul dalen. [1p]
Voor $x = 0$ en $x = 1$ geeft H geen uitkomst omdat $\ln(0)$ niet bestaat, dus de Shannon-index nadert wel naar nul maar wordt nooit nul.

4p **6** Uit de schets in de vorige vraag volgt dat H maximaal is als $\frac{dH}{dp} = 0 \Leftrightarrow$
$-\ln(p) + \ln(1-p) = 0$ [1p] $\Leftrightarrow \ln(1-p) = \ln(p) \Leftrightarrow 1-p = p \Leftrightarrow -2p = -1 \Leftrightarrow$
$p = 0{,}5$ [1p] dus er is een maximum als het aandeel eiken 50% is. [1p]
In dit bos met slechts twee soorten bomen is de Shannon-index maximaal bij 50% eiken en 50% beuken. [1p]

Bitcoins

3p **7** Op 1 januari 2014 waren er 12,2 miljoen bitcoins. Om tot 18 miljoen te komen moeten er nog 5,8 miljoen bijkomen.

Dit duurt (5,8 miljoen/25) keer 10 minuten [1p] dus $\frac{5{,}8 \text{ miljoen}}{25} \cdot 10 = 2\,320\,000$ minuten

en dat is $\frac{2\,320\,000}{60 \cdot 24 \cdot 365} = 4{,}4\ldots$ jaren. [1p]

Ruim 4 jaar na 1 januari 2014 stijgt het aantal bitcoins tot boven de 18 miljoen. Dat is in het jaar 2018. [1p]

4p **8** De beloning per oplossing volgt een meetkundige rij met als directe formule:
$u(n) = 50 \cdot 0{,}5^{n-1}$ voor $n \geq 1$, waarin $n = 1$ hoort bij de periode 1 januari 2009 tot 1 januari 2013 en $n = 2$ hoort bij de periode 1 januari 2013 tot 1 januari 2017 enz.
Een tabel bij deze formule: [2p]

n	1	2	3	4	5	6	7
$u(n)$	50	25	12,5	6,25	3,125	1,5625	0,78125

Na 6 perioden van vier jaar daalt de beloning per oplossing voor het eerst onder de 1 bitcoin. [1p] Dat is vanaf het jaar 2033. [1p]

3p **9** $0{,}5^{0{,}25 \cdot t} = (0{,}5^{0{,}25})^t = (0{,}84\ldots)^t$ dus $0{,}5^{0{,}25 \cdot t}$ daalt naar nul als t groot wordt. [1p]

Maar dan daalt $21 \cdot 0{,}5^{0{,}25 \cdot t}$ ook naar nul als t groot wordt, dus zal $21 - 21 \cdot 0{,}5^{0{,}25 \cdot t}$ stijgen naar 21 als t groot wordt. [1p]
De grenswaarde van het totale aantal bitcoins is 21 miljoen. [1p]

4p **10** Differentiëren met de kettingregel:
$D = 3{,}65 \cdot e^{0{,}533 \cdot t} \Rightarrow D' = 3{,}65 \cdot e^{0{,}533 \cdot t} \cdot 0{,}533 = 1{,}94545 \cdot e^{0{,}533 \cdot t}$ [2p]
Omdat $1{,}94545 \cdot e^{0{,}533 \cdot t}$ positief is voor elke waarde van t zal de grafiek van D stijgen. [1p]
Omdat $1{,}94545 \cdot e^{0{,}533 \cdot t} = 1{,}94545 \cdot (e^{0{,}533})^t = 1{,}94545 \cdot (1{,}704\ldots)^t$ steeds groter wordt voor stijgende t, zal D toenemend stijgen. [1p]

4p **11** $D = 3{,}65 \cdot e^{0{,}533 \cdot t} \Rightarrow$
$\ln(D) = \ln(3{,}65 \cdot e^{0{,}533 \cdot t})$ [1p] $= \ln(3{,}65) + \ln(e^{0{,}533 \cdot t})$ [1p] $= \ln(3{,}65) + 0{,}533 \cdot t$ [1p] $\Rightarrow$
$0{,}533 \cdot t = \ln(D) - \ln(3{,}65) \Rightarrow$
$t = \frac{\ln(D) - \ln(3{,}65)}{0{,}533}$ [1p]

Jaarringen

4p **12** De evenwichtsstand $a = \frac{2{,}1 + 0{,}3}{2} = 1{,}2.$ [1p]

De amplitude $b = \frac{2{,}1 - 0{,}3}{2} = 0{,}9.$ [1p]

De periode van G is een jaar. Na 3 maanden, een kwart periode, bereikt G een maximum, dus voor $t = 0$ ligt de grafiek van G op de evenwichtsstand $\Rightarrow d = 0$ [1p]

periode $= \frac{2\pi}{c} \Rightarrow 1 = \frac{2\pi}{c} \Rightarrow c = 2\pi.$ [1p]

Overzicht: $a = 1{,}2$; $b = 0{,}9$; $c = 2\pi$ en $d = 0$.

3p **13** Voer de formules $y_1 = 1{,}2x + 0{,}14 + 0{,}14\sin(2\pi(x - 0{,}25))$ en $y_2 = 5$ in de rekenmachine in. De optie *intersect/snijpunt* [1p] geeft $x = 4{,}1299\ldots$ jaren. [1p]
$12 \cdot 4{,}1299\ldots = 49{,}55\ldots$
Het duurt afgerond 50 maanden voordat een dikte van 5 cm bereikt wordt. [1p]
Het antwoord 4 jaar en 2 maanden is ook correct.

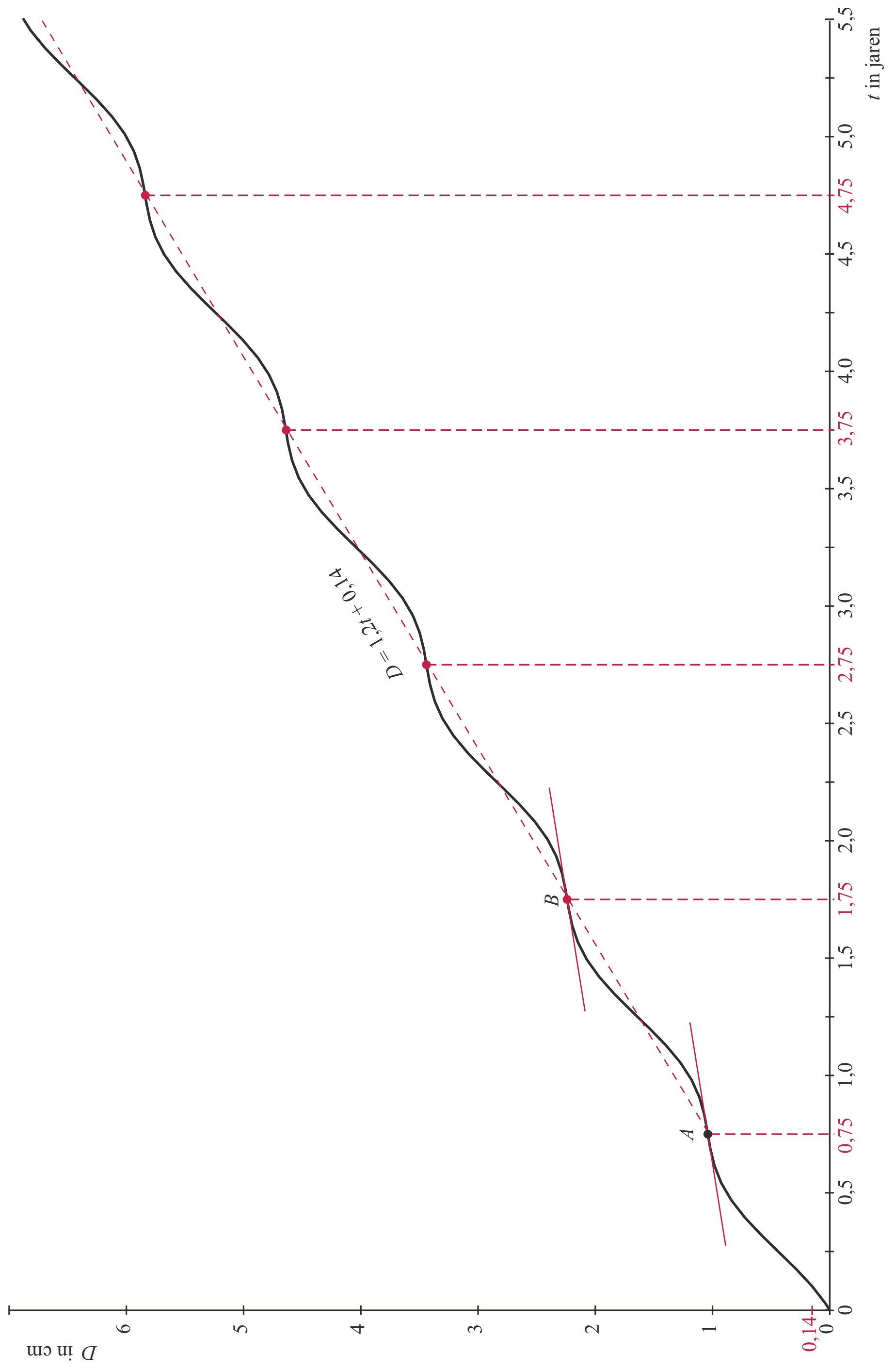
3p **14** Het grootste verschil tussen D en T is het maximum of minimum van $D - T$. [1p]
$D - T = 1{,}2t + 0{,}14 + 0{,}14\sin(2\pi(t - 0{,}25)) - (1{,}2t + 0{,}14) = 0{,}14\sin(2\pi(t - 0{,}25))$
Het maximale verschil tussen D en T is dus gelijk aan de amplitude van $0{,}14\sin(2\pi(t - 0{,}25))$ [1p] en die is 0,14.
De maximale afwijking tussen D en T is 0,14 cm. [1p]
andere manier
Het is ook mogelijk het maximum/minimum van
$y_1 = 1{,}2x + 0{,}14\sin(2\pi(x - 0{,}25))$ $(1{,}2x + 0{,}14)$ met behulp van de rekenmachine te bepalen.

3p **15** $t = 0$ geeft $D(0) = 0$ en $t = 0{,}5$ geeft $D(0{,}5) = 0{,}88$ dus in het eerste halfjaar groeit de dikte van de boom met 0,88 cm. [1p]
$t = 1$ geeft $D(1) = 1{,}2$ dus na 1 jaar is de boom 1,2 cm dik. [1p]
De groei in het eerste halfjaar is $\frac{0{,}88}{1{,}2} \cdot 100 \approx 73\%$ van die in het gehele jaar. [1p]

3p **16** Teken de raaklijn aan de grafiek in punt A. Zoek met de geodriehoek op de grafiek een punt waarin de raaklijn evenwijdig is aan die in punt A. Op deze wijze kun je een punt B vinden. [1p]
andere manier
De helling van de grafiek van D varieert periodiek door de sinus in de formule. De periode is 1 jaar, dus bij $t = 1{,}75$; $2{,}75$;... enzovoort zal de helling even groot zijn als bij $t = 0{,}75$. Het getekende punt B hoort bij $t = 1{,}75$. [1p]
nog een andere manier
De grafiek van D schommelt rond de lijn $T = 1{,}2t + 0{,}14$.
Meet op de verticale as een punt op hoogte 0,14 uit en teken vanuit dit punt de lijn door punt A.
Op de plaatsen waar deze lijn de grafiek van D snijdt, is de groeisnelheid maximaal of minimaal (punt B). Punt B is een van de mogelijke punten. [1p]
Op het werkblad op de volgende bladzijde zijn alle drie de oplossingen aangegeven.

De optie *nDeriv* op de rekenmachine geeft voor $t = 0{,}75$ als groeisnelheid
$\frac{d}{dx}(1{,}2x + 0{,}14 + 0{,}14\sin(2\pi(x - 0{,}25)))_{x=0{,}75}$ [1p] $\approx 0{,}32$ cm per jaar. [1p]

grafiek bij vraag 16



Toren van achtvlakken

4p **17** Kies eerst drie van de negen achtvlakken om rood te maken.

Dit kan op $\binom{9}{3}$ manieren. [1p]

Kies vervolgens drie van de resterende zes achtvlakken om oranje te maken.

Dit kan op $\binom{6}{3}$ manieren. [1p]

De drie achtvlakken die nu nog over zijn, worden geel gemaakt.

Er zijn $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3}$ [1p] $= 84 \cdot 20 = 1680$ manieren [1p] om de achtvlakken te kleuren.

3p **18** Vanaf de voet gerekend moet de ribbe 9 maal met r worden vermenigvuldigd om de ribbe van het bovenste achtvlak te vinden:

$20 \cdot r^9 = 4$ [1p] $\Leftrightarrow$ $r^9 = \frac{4}{20} = 0{,}2$ $\Leftrightarrow$ $r = 0{,}2^{\frac{1}{9}}$ [1p] of $\sqrt[9]{0{,}2} = 0{,}8362...$

Afgerond op drie decimalen: $r = 0{,}836$. [1p]

3p **19** In negen gelijke stappen neemt de lengte van de ribben af van 20 naar 4 cm. [1p]

Dat is $\frac{4-20}{9} = -1{,}777... \approx -1{,}78$ per stap. Daarom is –1,78 het hellingsgetal (richtingscoëfficiënt) van de lineaire formule. [1p]

Bij $n = 0$ hoort de ribbe van de lengte van de voet en daarom is het startgetal 20. [1p]

4p **20** De formule die hoort bij de meetkundige rij is $u_n = 20 \cdot 0{,}84^n$. [1p]
Voer in de rekenmachine de formule van zowel de meetkundige als de rekenkundige rij in: $y_1 = 20 \cdot 0{,}84^x$ en $y_2 = 20 - 1{,}78x$.
Een tabel hierbij: [1p]

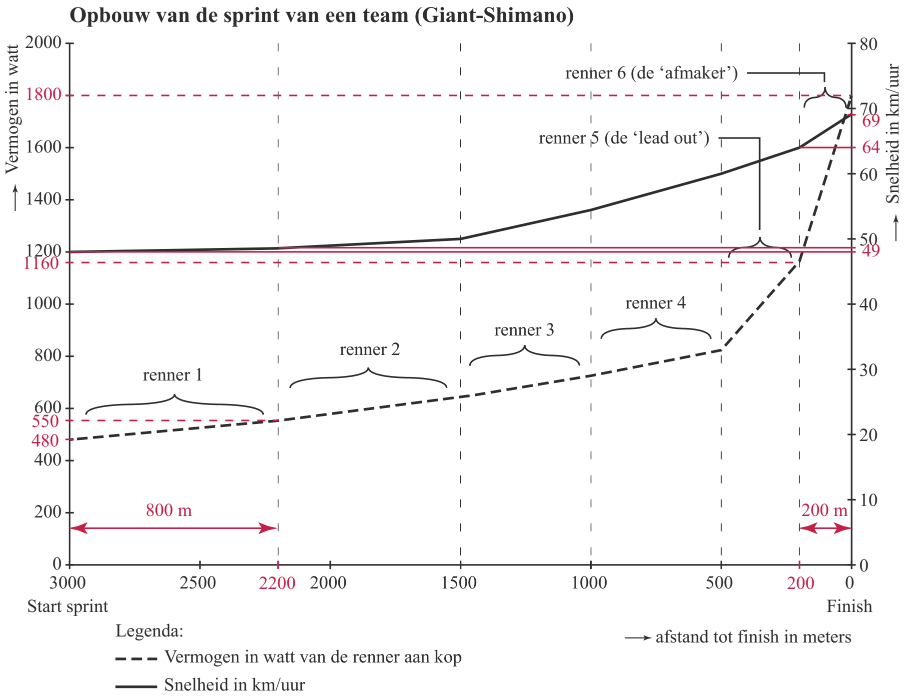
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_1	20	16,8	14,11	11,85	9,76	8,36	7,03	5,90	4,96	4,16
y_2	20	18,22	16,44	14,66	12,88	11,1	9,32	7,54	5,76	3,98
verschil	0	1,42	2,33	2,81	**2,92**	2,74	2,29	1,64	0,80	0,18

Bij het vierde achtvlak is het verschil maximaal. [1p] Het verschil is daar ongeveer 29 mm. [1p]

Merk op dat bij bovenstaande formules de ribbe van het negende achtvlak niet exact op 4 cm uitkomt. Dat komt door het rekenen met de afgeronde waarden 0,84 en 1,78. Doorrekenen met exacte waarden zoals $\sqrt[9]{0{,}2}$ *en –16/9 mag ook. Dan is het verschil nog steeds maximaal bij het vierde achtvlak, maar dat verschil komt dan uit op 31 mm.*

Sprinttrein

7p **21** *Alle benodigde gegevens opmeten/aflezen met behulp van een geodriehoek in de grafiek. Afgelezen waarden kunnen iets afwijken van wat hieronder staat.*



Renner 1 rijdt aan kop aan het begin van de sprint.
Zijn snelheid loopt nauwelijks op en is ongeveer 49 km/uur.

Renner 1 rijdt 800 meter = 0,8 km op kop dus daar doet hij $\frac{0,8}{49}$ uur = $\frac{0,8}{49} \cdot 3600 = 58,7...$ seconden over.

Zijn vermogen loopt lineair op van 480 naar 550 watt, dus gemiddeld is dat $\frac{480 + 550}{2} = 515$ watt.

De arbeid die renner 1 levert is $515 \cdot 58,7... \approx 30\,269$ (watt seconde). [3p]

Renner 6 rijdt aan kop aan het eind van de sprint.
Zijn snelheid loopt lineair op van 64 tot 69 km/uur dus gemiddeld 66,5 km/uur.

Renner 6 rijdt 200 meter = 0,2 km op kop dus daar doet hij $\frac{0,2}{66,5}$ uur = $\frac{0,2}{66,5} \cdot 3600 = 10,8...$ seconden over.

Zijn vermogen loopt lineair op van 1160 naar 1800 watt, dus gemiddeld is dat $\frac{1160 + 1800}{2} = 1480$ watt.

De arbeid die renner 6 levert is $1480 \cdot 10,8... \approx 16\,024$ (watt seconde). [3p]

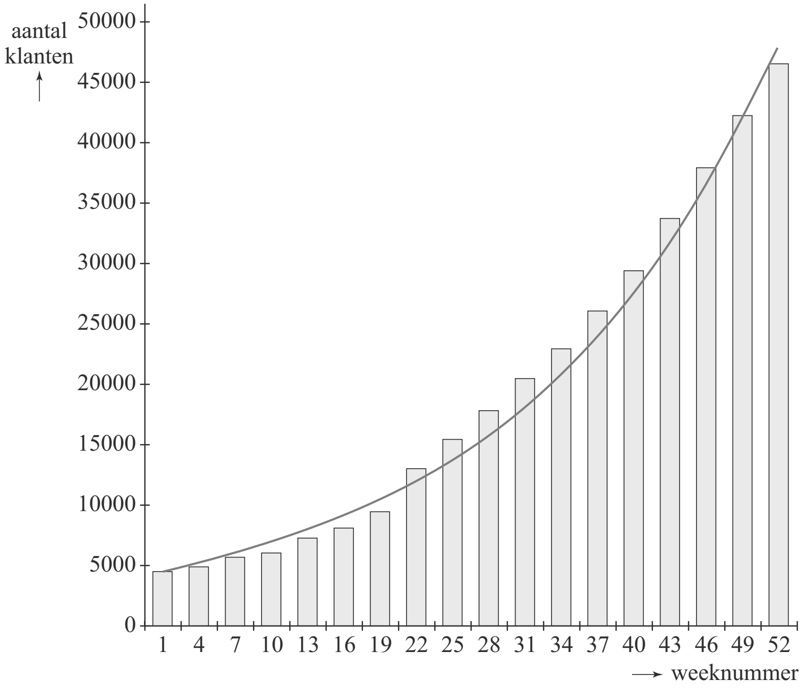
Renner 1 levert tijdens zijn periode op kop veel meer arbeid dan renner 6 tijdens zijn periode op kop. [1p]

Examen 2018-II

Knab

Knab is een tamelijk nieuwe bank, gestart in 2012 als onderdeel van Aegon. In het begin groeide Knab maar langzaam: eind 2013 had de bank nog maar 4500 klanten. Daarom besloot de bank in 2014 de zaken anders aan te pakken. Dit leverde direct resultaat op, want het aantal klanten is in 2014 tien keer zo groot geworden.
Zie de uitwerkbijlage.

uitwerkbijlage bij vraag 1 en 3



In de figuur zijn door middel van staven de aantallen klanten om de drie weken weergegeven. Bovendien is de grafiek getekend van een exponentieel model dat de werkelijke aantallen goed benadert. Het exponentiële model wordt gegeven door de formule:

$N = 4500 \cdot e^{0,0463 \cdot t}$

Hierin is t de tijd in weken sinds het begin van 2014 met $t = 0$ in week 1 en N het aantal klanten.

In week 43 lijkt het verschil tussen het aantal klanten volgens het model en het werkelijke aantal klanten het grootst.

3p **1** Bereken dit verschil in week 43. Je kunt hierbij gebruikmaken van de uitwerkbijlage. Rond je antwoord af op honderdtallen.

Zoals gezegd is het aantal klanten in het jaar 2014 vertienvoudigd. Dat lijkt inderdaad precies een jaar geduurd te hebben.

3p **2** Bereken met behulp van de formule het gehele aantal weken dat in het model nodig is voor een vertienvoudiging.

De snelheid waarmee het aantal klanten per week groeit, kun je benaderen door de helling van de grafiek op het betreffende tijdstip te bepalen.

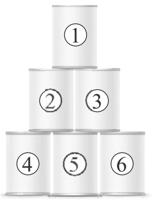
4p **3** Benader met behulp van de grafiek in de uitwerkbijlage de snelheid waarmee het aantal klanten per week groeit in week 31 van 2014. Rond je antwoord af op honderdtallen.

Je kunt de formule $N = 4500 \cdot e^{0{,}0463 \cdot t}$ zó herschrijven, dat bij een gegeven aantal klanten berekend wordt in welke week dat aantal bereikt wordt. Dat verband is van de vorm:

$$t = a \cdot \ln(b \cdot N)$$

3p **4** Bereken a en b. Rond de waarde van a af op twee decimalen en de waarde van b op vijf decimalen.

Blikstapelingen

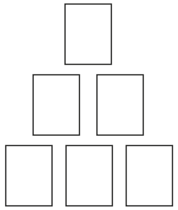


Bij het spel blikgooien krijgt de speler één of meer ballen waarmee hij of zij moet proberen zoveel mogelijk blikken van een toren af te gooien. Zo'n toren is altijd op dezelfde manier opgebouwd: op de onderste laag staat een aantal blikken en op de lagen erboven steeds één minder. Op de foto zie je een toren met zes blikken.

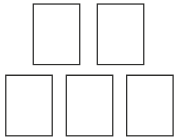
We nemen in deze opgave aan dat, als een bal de toren raakt, de onderste laag in zijn geheel blijft staan. Neem aan dat een geraakt blik ook werkelijk van de toren afvalt en nooit "mooi" op een lager gelegen laag terechtkomt en ook dat blikken niet blijven staan als één of meer blikken eronder wegvallen.

Lars gooit één bal naar een toren met zes blikken, zoals op de foto.
Na zijn worp blijft de onderste laag van drie blikken staan. Er zijn nu vijf mogelijkheden voor de overgebleven toren. Drie van deze mogelijkheden zijn in figuur 1a, 1b en 1c schematisch getekend.

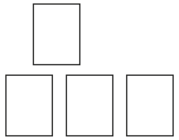
figuur 1a



figuur 1b



figuur 1c



2p **5** Teken de andere twee mogelijkheden.

We gaan in deze opgave deze situatie wat theoretischer bekijken. We tellen het aantal mogelijke stapelingen van blikken op een onderste laag van n blikken. Hierbij staat vanaf de tweede laag ieder blik steeds boven op twee onderliggende blikken. We nemen steeds aan dat er één keer gegooid is en dat de hele onderste laag is blijven staan.

Voor $n = 1$ is er maar één blik, dus is er ook één mogelijke stapeling.
Voor $n = 2$ zijn er twee mogelijke stapelingen. Zie figuur 2.

figuur 2

Je kunt nu met een redenering nagaan dat het aantal mogelijke stapelingen voor $n = 3$ gelijk is aan 5. Deze redenering gaat als volgt:

- Er is één manier met 3 blikken op de onderste laag en 0 blikken op de tweede laag.
- Er zijn twee manieren met 3 blikken op de onderste laag en 1 blik op de tweede laag.
- Er is één manier met 3 blikken op de onderste laag en 2 blikken op de tweede laag (figuur 1b).
- Er is één manier met 3 blikken op de onderste laag, 2 blikken op de tweede laag en 1 blik op de derde laag (figuur 1a).

Dat is samen 1 + 2 + 1 + 1 = 5 mogelijkheden.

Voor $n = 4$ is het aantal mogelijke stapelingen gelijk aan 14.

4p **6** Toon dit aan.

De Belgische wiskundige Charles Catalan ontdekte in de 19e eeuw de volgende formule:

$$C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + C_2 \cdot C_{n-3} + \ldots + C_{n-1} \cdot C_1 + C_{n-1} \cdot C_0 \text{ met } C_0 = 1$$

Hierin is C_n het aantal mogelijke stapelingen met n blikken op de onderste laag.

3p **7** Bereken met behulp van bovenstaande formule C_5.

Voor deze rij getallen, de zogenaamde Catalan-getallen, bestaat geen directe formule. Wel bestaat er een formule die voor grote waarden van n de Catalan-getallen benadert. Deze formule is $B_n = 0{,}564 \cdot e^{1{,}386 \cdot n} \cdot n^{-1{,}5}$, waarbij B_n een benadering is van het n^e Catalan-getal (C_n).

De getallen voor B_n worden snel groter. Hoe snel dit gaat, is te berekenen met behulp van de afgeleide van B_n . Er geldt (bij benadering):

$$B_n' = 0{,}782 \cdot e^{1{,}386 \cdot n} \cdot n^{-1{,}5} - 0{,}846 \cdot e^{1{,}386 \cdot n} \cdot n^{-2{,}5}$$

4p **8** Toon dit aan.

Vanaf een bepaald aantal blikken zal het aantal mogelijke stapelingen met meer dan 500 000 toenemen als de onderste laag met één blik toeneemt.

3p **9** Onderzoek met behulp van de afgeleide van B_n vanaf welk aantal blikken op de onderste laag dit is.

Kaarten schudden

Na het schudden begint een kaartspel meestal met het gelijk verdelen van de kaarten onder een aantal spelers. Neem aan dat bij een bepaald spel 16 verschillende kaarten gelijk verdeeld worden onder vier spelers A, B, C en D. Spelers A, B, C en D krijgen ieder dus vier kaarten.

We bekijken een stapel kaarten bestaand uit 16 verschillende kaarten.
Deze kaarten kunnen op circa $2{,}1 \cdot 10^{13}$ verschillende volgordes liggen.

Het aantal volgordes waarin de kaarten kunnen liggen, is veel groter dan het aantal mogelijkheden om de kaarten onder de vier spelers A, B, C en D te verdelen.

4p **10** Bereken hoeveel keer zo groot dit aantal is. Rond af op tienduizendtallen.

In 1992 publiceerden de Amerikaanse wiskundigen Bayer en Diaconis een artikel over het schudden van kaarten. Voor dit artikel hadden zij de meest gebruikte manier van schudden onderzocht, de zogeheten **Riffle Shuffle** (zie de foto).

Zij kwamen tot de conclusie dat het met deze schudtechniek niet mogelijk is een stapel kaarten écht willekeurig te maken, zoals bijvoorbeeld een computer dat wel kan. Voor het spelen van een kaartspel is het goed genoeg als de kaarten “voldoende willekeurig” geschud zijn.

Bayer en Diaconis ontdekten tijdens hun onderzoek dat het aantal keren dat een stapel kaarten minstens geschud moet worden om als “voldoende willekeurig” bestempeld te worden, kan worden benaderd met de formule:

$A = 1{,}5 \cdot {}^{2}\log(n)$

In deze formule is A het aantal keren dat een stapel van n kaarten minstens geschud moet worden om als “voldoende willekeurig” bestempeld te worden. A wordt naar boven afgerond op een geheel getal.

Het kaartspel **jokeren** wordt gespeeld met twee sets van 52 speelkaarten, aangevuld met in totaal 4 zogeheten **jokers**.

2p **11** Bereken hoe vaak de kaarten bij jokeren minstens geschud moeten worden volgens de formule van Bayer en Diaconis.

Als het aantal te schudden kaarten toeneemt, neemt ook het aantal keren dat er minstens geschud moet worden toe. Dit aantal neemt echter steeds langzamer toe.

Je kunt dit zien aan de afgeleide $\frac{dA}{dn}$.

4p **12** Stel de formule op van de afgeleide $\frac{dA}{dn}$ en beredeneer aan de hand van deze formule, dus zonder getallen in te vullen of een schets te maken, dat A afnemend stijgend is.

In de meeste casino’s kun je het spel **blackjack** spelen. Dat wordt over het algemeen gespeeld met vier spellen kaarten (totaal 208 kaarten).
Het aantal keer dat zo’n groot aantal kaarten minstens geschud moet worden is helemaal niet zo groot: volgens de formule van Bayer en Diaconis slechts 12 keer.
Dat is maar drie keer schudden meer dan bij één spel kaarten.

Volgens de formule van Bayer en Diaconis geldt in het algemeen: als het aantal kaarten vier keer zo groot wordt, hoeft er maar drie keer extra geschud te worden.

4p **13** Toon dit aan met behulp van de formule voor A en de rekenregels voor logaritmen zonder gebruik te maken van getallenvoorbeelden.

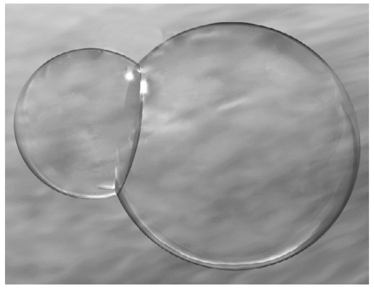
Zeepbellen

Op de foto zie je een **dubbele zeepbel**: twee bolvormige zeepbellen die aan elkaar vastzitten. Beide zeepbellen zijn een deel van een bol.
Het scheidingsvlies tussen deze zeepbellen is ook een deel van een bol.
Men heeft ontdekt dat voor elke dubbele zeepbel de volgende formule geldt:

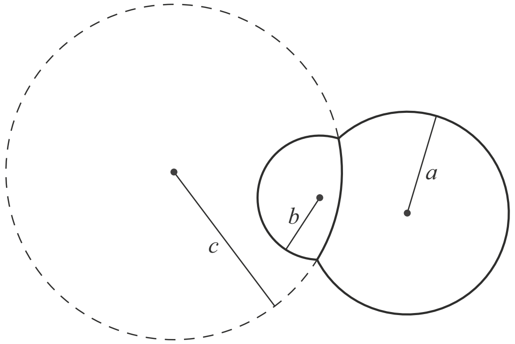
$$\frac{1}{c} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$$

In deze formule is a de straal van de grootste zeepbel, b de straal van de kleinste zeepbel en c de straal van het bolvormige scheidingsvlies.
In de figuur is dit schematisch weergegeven.

foto



figuur



De dubbele zeepbel op de foto bestaat uit een zeepbel met een straal van 2,5 cm en een zeepbel met een straal van 4 cm.

3p **14** Bereken met behulp van bovenstaande formule de straal van het scheidingsvlies. Rond je antwoord af op hele millimeters.

Neem nu aan dat de grootste zeepbel een vaste straal heeft van 3 cm (dus $a = 3$).
We vragen ons af wat er gebeurt als de straal van de kleinste zeepbel steeds kleiner wordt: wordt het scheidingsvlies dan steeds platter of steeds boller?
Met andere woorden: neemt c toe of af?

4p **15** Beredeneer aan de hand van bovenstaande formule of c toeneemt of afneemt als de straal van de kleinste zeepbel steeds kleiner wordt.

Als de stralen a en b bekend zijn, kun je c snel en rechtstreeks berekenen door de formule $\frac{1}{c} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ te herleiden tot $c = \frac{ab}{a-b}$.

3p **16** Geef deze herleiding.

Het antwoord op de vraag of het scheidingsvlies steeds platter of boller wordt als de kleinste zeepbel steeds kleiner wordt, kunnen we ook vinden met behulp van de afgeleide van c.

We nemen opnieuw een grootste zeepbel met een vaste straal van 3 cm.
De formule $c = \frac{ab}{a-b}$ wordt dan $c = \frac{3b}{3-b}$ met $0 < b < 3$.

5p **17** Stel de afgeleide $\frac{dc}{db}$ van $c = \frac{3b}{3-b}$ op en beredeneer aan de hand van de formule van deze afgeleide of c toeneemt of afneemt als de straal van de kleinste zeepbel kleiner wordt.

Schildpadden

Sommige mensen hebben een schildpad als huisdier. Bepaalde soorten houden onder natuurlijke omstandigheden een winterslaap. De eigenaar kan ervoor kiezen om zijn schildpad ook in winterslaap te laten gaan, omdat hij anders de hele winter extra licht en warmte moet geven aan zijn huisdier. Een schildpad moet een gezond gewicht hebben bij het begin van zijn winterslaap, anders is er een kans dat hij het niet overleeft. Om vast te stellen of de schildpad een gezond gewicht heeft, wordt vaak de **Jackson Ratio** gebruikt.

De Jackson Ratio R wordt berekend met de formule $R = \frac{G}{L^3}$.

Hierin is G het gewicht van de schildpad in gram en L de lengte van het schild van de schildpad in cm.
Voor de Griekse landschildpad geldt de volgende vuistregel: een schildpad kan veilig aan een winterslaap beginnen als zijn Jackson Ratio tussen 0,18 en 0,22 ligt.

Jesse heeft een Griekse landschildpad met een schildlengte van 15 cm en wil hem een winterslaap laten houden.
3p **18** Bereken in hele grammen nauwkeurig tussen welke waarden zijn gewicht dan mag liggen volgens de vuistregel.

De lengte van het schild moet recht gemeten worden, bijvoorbeeld door de schildpad met ingetrokken kop tussen een schuifmaat te zetten (zie foto 1). Veronderstel dat iemand toch de lengte over het schild heen meet (zie foto 2).

foto 1

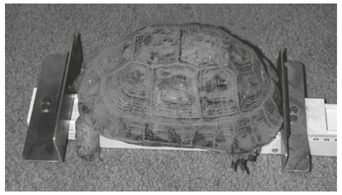
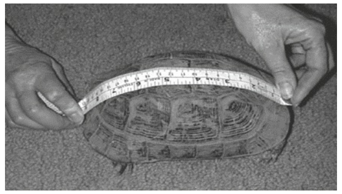


foto 2



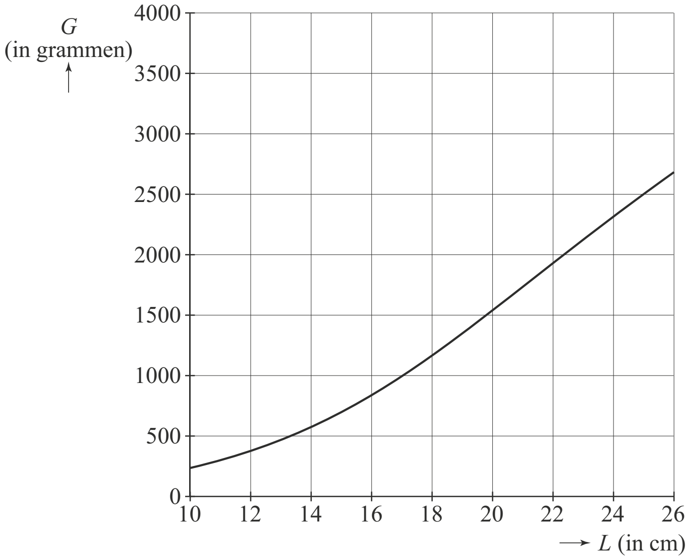
3p **19** Beredeneer of een schildpad door op die manier te meten een grotere of een kleinere Jackson Ratio krijgt dan hij in werkelijkheid heeft.

Op een Engelse website staat het volgende: als je het gewicht meet in Engelse ponden (lbs) en de schildlengte in inches, kun je de Jackson Ratio berekenen met de formule $R = c \cdot \frac{W}{l^3}$.

Hierin is W het gewicht in Engelse ponden en l de schildlengte in inches.
1 Engels pond (lb) ≈ 454 gram en 1 inch = 2,54 cm.
De Jackson Ratio moet dan ook weer dezelfde waarde opleveren.
3p **20** Bereken de waarde van c in deze formule. Rond je antwoord af op één decimaal.

Een andere manier om te bepalen of een Griekse landschildpad veilig aan een winterslaap kan beginnen, is met behulp van de grafiek in onderstaande uitwerkbijlage. De grafiek geeft het gewicht van gezonde schildpadden als functie van de schildlengte. Als een schildpad met zijn lengte en gewicht in de buurt van deze grafiek zit, is het veilig om hem in winterslaap te laten gaan.

uitwerkbijlage

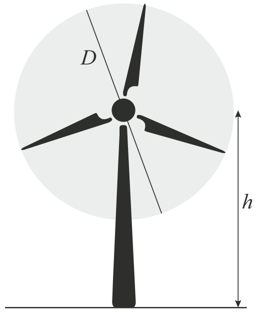


We vragen ons af of de grafiek van de uitwerkbijlage bij benadering overeenstemt met de eerder genoemde vuistregel. Om dit te onderzoeken kunnen we in de uitwerkbijlage de grafieken tekenen van de onder- en de bovengrens die horen bij de eerder genoemde vuistregel en vervolgens het gebied dat hoort bij die vuistregel in de uitwerkbijlage aangeven.

6p **21** Geef in de uitwerkbijlage het gebied aan waarin een schildpad zich volgens de vuistregel met zijn schildlengte en gewicht moet bevinden om veilig aan een winterslaap te kunnen beginnen.

Grotere windmolens

Met behulp van windmolens wordt windenergie omgezet in elektriciteit. De afgelopen tientallen jaren zijn steeds grotere windmolens geplaatst, want hoe groter een windmolen, hoe groter de elektriciteitproductie door die windmolen. In deze opgave kijken we naar de toenemende opbrengst van windmolens bij toenemende grootte.



In de figuur zie je een schematische tekening van een windmolen met hierin aangegeven de ashoogte *h* en de ‘rotordiameter’ *D*.
De maximale hoeveelheid elektriciteit die men met een windmolen kan produceren, noemt men het **vermogen** van de windmolen. Dit vermogen *P* wordt uitgedrukt in MW (megawatt).
Het vermogen van een windmolen hangt onder andere af van de ashoogte. Doordat er op grotere hoogte meer wind is en doordat de wind daar constanter is, neemt het vermogen voor elke meter extra ashoogte met een bepaald percentage toe.
Er geldt: bij gelijkblijvende rotordiameter neemt voor elke meter extra ashoogte het vermogen met 0,68% toe.

Het vermogen van een windmolen hangt naast de ashoogte ook af van de rotordiameter. Deze twee factoren spelen tegelijkertijd een rol. Dat komt tot uiting in de formule voor het vermogen:

$P = 2{,}21 \cdot 10^{-4} \cdot g^h \cdot D^2$

Hierin is *P* het vermogen in MW, *g* de groeifactor per extra meter ashoogte, *h* de ashoogte in meter en *D* de rotordiameter in meter.

In een windmolenpark staan 40 windmolens met elk een vermogen van 0,75 MW. De molens hebben een rotordiameter van 50 meter en een ashoogte van 45 meter. De windmolens in dit park zijn aan vervanging toe. Men wil deze windmolens vervangen door tien gelijke windmolens van een groter type. Men hanteert als vuistregel dat een windmolen van dit type € 25 000,- per meter ashoogte kost. Bij de huidige windmolens is de verhouding tussen ashoogte en rotordiameter gelijk aan $\frac{45}{50} = 0{,}9$.

Deze verhouding zal ook gelden voor het grotere type windmolen, dus voor dit type geldt: $h = 0{,}9D$.
Het totale vermogen van het park moet met de nieuwe windmolens minstens even groot worden als het met de huidige windmolens is.

7p **22** Bereken de minimale investering die gedaan zal moeten worden voor de bouw van de nieuwe windmolens. Rond je antwoord af op miljoenen euro’s.

Hints bij examen 2018-II

1 Lees het werkelijke aantal klanten af bij de staaf van week 43. Het aantal klanten volgens het model kan volgens de grafiek bij week 43 worden afgelezen, maar kan ook worden berekend met de formule. Let op dat in week 43 geldt $t = 42$.

2 Op te lossen: $e^{0{,}0463 \cdot t} = 10$. Dit kan met de rekenmachine of algebraïsch.

3 Teken bij week 31 een raaklijn aan de grafiek. Lees punten op deze raaklijn af en bepaal hiermee de helling van de raaklijn.

4 Gebruik de regel $e^a = b \Leftrightarrow a = \ln(b)$.

5 -

6 Systematisch tellen. Maak schetsjes op papier.

7 $C_5 = C_0 \cdot C_4 + C_1 \cdot C_3 + C_2 \cdot C_2 + C_3 \cdot C_1 + C_4 \cdot C_0$ en omdat C_0 tot en met C_4 al bekend zijn kan C_5 berekend worden.

8 B_n differentiëren met de kettingregel en de productregel.

9 De afgeleide bepaalt de snelheid van verandering dus B_n' moet groter dan 500 000 zijn.

10 Om het aantal mogelijkheden te berekenen om speler A 4 van de 16 kaarten te geven, kun je het aantal combinaties van 4 uit 16 berekenen.

11 Stel vast met hoeveel kaarten jokeren wordt gespeeld en vul dit aantal in. Verstandig afronden.

12 De formule voor de afgeleide van een log-functie is: $y = {}^g\log(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cdot \ln(g)}$.

13 Als het aantal kaarten stijgt van *n* naar 4*n* dan stijgt het aantal keren schudden van $A(n)$ naar $A(4n)$. Gebruik de formule: ${}^g\log(ab) = {}^g\log(a) + {}^g\log(b)$.

14 Vul de gegeven waarden van *a* en *b* in en bereken *c* met de gevraagde nauwkeurigheid.

15 Vul $a = 3$ in de formule in en beredeneer wat er gebeurt met de verschillende delen van de formule als *b* kleiner wordt.

16 Maak de breuken in het rechterlid gelijknamig en voeg ze samen tot één breuk.

17 *c* differentiëren met de quotiëntregel.

18 Uit de gegevens volgt een ongelijkheid voor *G*. Stel deze ongelijkheid op en bereken de grenzen voor *G*. Verstandig afronden.

19 Onderzoek wat er met de teller en de noemer van de Jackson Ratio gebeurt als je de methode van foto 1 vervangt door die van foto 2.

20 Reken gegevens van vraag 18 om naar Engelse maten en vul ze in in de Engelse formule van de Jackson Ratio. Andere manier: Stel omrekenformules op voor Engelse maten en substitueer deze in de formule van de Jackson Ratio.

21 De grenzen van het gebied worden bepaald door $\frac{G}{L^3} = 0{,}18$ en $\frac{G}{L^3} = 0{,}22$.

Bereken bij deze formules voldoende punten om de bijbehorende grafieken te kunnen tekenen.

22 Bereken eerst hoeveel het vermogen van een nieuwe molen moet zijn. Vul dan dit vermogen, de groeifactor en de verhouding tussen ashoogte en rotordiameter in de gegeven formule van *P* in. Uit de vergelijking die dan ontstaat kan *h* (of *D*) berekend worden.

©ThiemeMeulenhoff

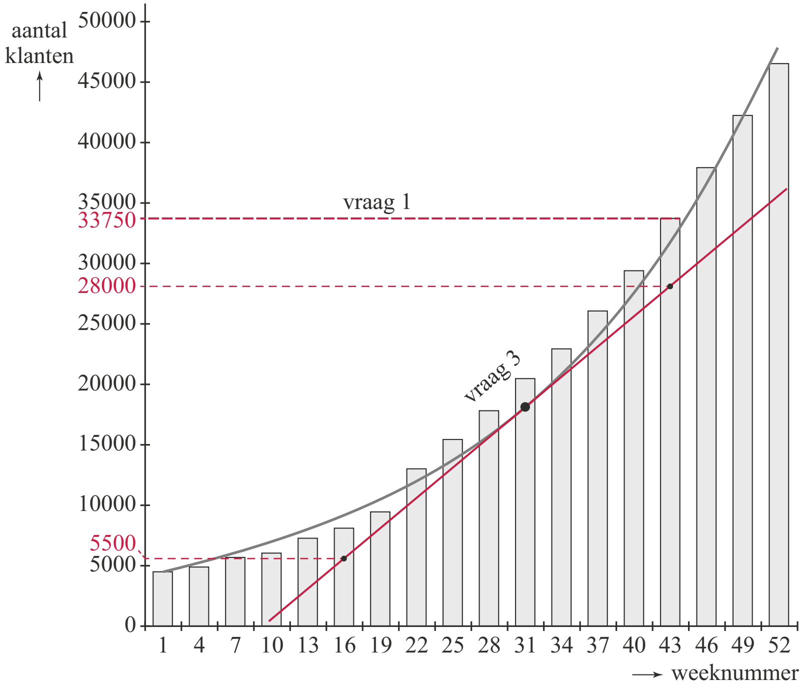
Uitwerkingen bij examen 2018-II

Knab

3p **1** Aflezen in de grafiek bij de staaf bij week 43: het werkelijke aantal klanten in week 43 is ongeveer 33 750. [1p]
In week 43 geldt $t = 42$. De formule geeft $N(42) = 4500 \cdot e^{0{,}0463 \cdot 42} = 31\,459$ klanten. [1p]
$33\,750 - 31\,459 = 2291$ dus afgerond op honderdtallen is het verschil 2300. [1p]

3p **2** Vertienvoudigen betekent vermenigvuldigen met 10, dus dan moet gelden:
$e^{0{,}0463 \cdot t} = 10 \Leftrightarrow 0{,}0463 \cdot t = \ln(10) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(10)}{0{,}0463}$ [1p] $= 49{,}7...$ [1p]
dus in het model is het aantal klanten na 50 weken vertienvoudigd. [1p]
De vergelijking in deze vraag mag met de grafische rekenmachine worden opgelost.

4p **3** Teken bij week 31 een raaklijn aan de grafiek die bij de modelformule hoort. [1p]

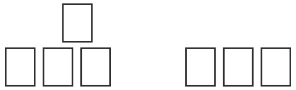


Punten op deze raaklijn zijn bijvoorbeeld: (16, 5500) en (43, 28 000). [1p]
$\frac{\Delta(\text{aantal klanten})}{\Delta(\text{weeknummer})} = \frac{28\,000 - 5500}{43 - 16} = \frac{22\,500}{27} \approx 833$ [1p]
De snelheid waarmee het aantal klanten per week groeit in week 31 afgerond op honderdtallen is 800. [1p]

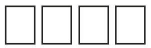
3p **4** $N = 4500 \cdot e^{0{,}0463 t} \Leftrightarrow e^{0{,}0463 \cdot t} = \frac{N}{4500}$ [1p] $\Leftrightarrow 0{,}0463 \cdot t = \ln\left(\frac{N}{4500}\right)$ [1p] $\Leftrightarrow$
$t = \frac{\ln\left(\frac{N}{4500}\right)}{0{,}0463} \Leftrightarrow t = \frac{1}{0{,}0463} \cdot \ln\left(\frac{1}{4500} \cdot N\right)$
dus $a = \frac{1}{0{,}0463} \approx 21{,}60$ en $b = \frac{1}{4500} = 2{,}22... \cdot 10^{-4} \approx 0{,}00022$. [1p]

Blikstapelingen

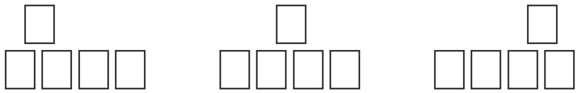
2p **5** De twee andere mogelijkheden zijn: [2p]



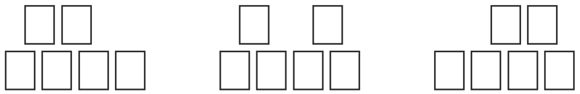
4p **6** Er is één manier met 4 blikken op de onderste laag en 0 blikken op de tweede laag:



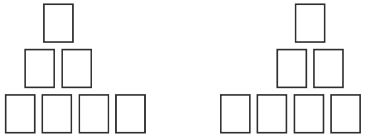
Er zijn drie manieren met 4 blikken op de onderste laag en 1 blik op de tweede laag:



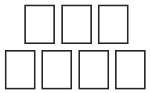
Er zijn drie manieren met 4 blikken op de onderste laag, 2 blikken op de tweede laag en 0 blikken op de derde laag:



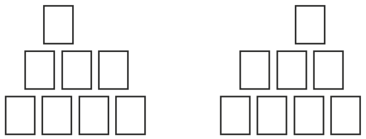
Er zijn twee manieren met 4 blikken op de onderste laag, 2 blikken op de tweede laag en 1 blik op de derde laag:



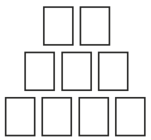
Er is één manier met 4 blikken op de onderste laag, 3 blikken op de tweede laag en 0 blikken op de derde laag:



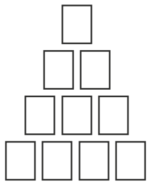
Er zijn twee manieren met 4 blikken op de onderste laag, 3 blikken op de tweede laag en 1 blik op de derde laag:



Er is één manier met 4 blikken op de onderste laag, 3 blikken op de tweede laag, 2 blikken op de derde laag en 0 blikken op de vierde laag:



Er is één manier met 4 blikken op de onderste laag, 3 blikken op de tweede laag, 2 blikken op de derde laag en 1 blik op de vierde laag:



Het totaal aantal mogelijke stapelingen is inderdaad 14. [4p]

3p **7** Vul $n = 0$ in de formule in: $C_5 = C_0 \cdot C_4 + C_1 \cdot C_3 + C_2 \cdot C_2 + C_3 \cdot C_1 + C_4 \cdot C_0$. [1p]
Gegeven is $C_0 = 1$.
Uit de voorgaande vragen volgt $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$, $C_4 = 14$.
Dus $C_5 = 1 \cdot 14 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 14 \cdot 1$ [1p] $= 14 + 5 + 4 + 5 + 14 = 42$. [1p]

4p **8** $B_n = 0{,}564 \cdot e^{1{,}386 \cdot n} \cdot n^{-1{,}5}$ differentiëren met de kettingregel en de productregel.
$B_n' = 0{,}564 \cdot 1{,}386 \cdot e^{1{,}386 \cdot n} \cdot n^{-1{,}5} + 0{,}564 \cdot e^{1{,}386 \cdot n} \cdot -1{,}5n^{-2{,}5}$ [2p] $\Rightarrow$
$B_n' = 0{,}781704 \cdot e^{1{,}386 \cdot n} \cdot n^{-1{,}5} - 0{,}846 \cdot e^{1{,}386 \cdot n} \cdot n^{-2{,}5}$ [1p]
Als het getal 0,781704 op drie decimalen wordt afgerond tot 0,782, staat er de formule die in de opgave staat. [1p]

3p **9** B_n' moet groter dan 500 000 zijn.
Voer in de rekenmachine in $y_1 = 0{,}782 \cdot e^{1{,}386 \cdot x} \cdot x^{-1{,}5} - 0{,}846 \cdot e^{1{,}386 \cdot x} \cdot x^{-2{,}5}$.
Zoeken in een tabel naar de eerste uitkomst boven 500 000. [1p]

x	y_1
11	80800
12	286147
13	$1{,}02 \cdot 10^6$

Vanaf 13 blikken op de onderste rij is dat het geval. [2p]
Als je de niet afgeronde factor 0,781704 in de formule van de afgeleide laat staan, ontstaat een klein verschil met de tabel hierboven, maar ook dan is het antwoord: vanaf 13 blikken.

Kaarten schudden

4p **10** Als speler A 4 van de 16 kaarten krijgt, dan zijn daar $\binom{16}{4}$ mogelijkheden voor. [1p]
De spelers B, C en D krijgen van de overgebleven kaarten steeds 4 kaarten en dat geeft respectievelijk $\binom{12}{4}$, $\binom{8}{4}$ en $\binom{4}{4}$ mogelijkheden. [1p]
Het totaal aantal mogelijkheden om de kaarten onder de vier spelers te verdelen is
$\binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4} = 63\,063\,000$. [1p]
$\frac{2{,}1 \cdot 10^{13}}{63\,063\,000} = 333\,000{,}333$ dus het eerste aantal is, afgerond op tienduizendtallen, 330 000 keer zo groot als het tweede aantal. [1p]

2p **11** Twee sets van 52 speelkaarten, aangevuld met 4 jokers, geeft samen 108 kaarten.
$n = 108$ invullen in de formule: $1{,}5 \cdot {}^2\log(108) = 10{,}1\ldots$ [1p] dus $A = 11$. [1p]
Bij jokeren moet ten minste 11 keer geschud worden.

4p **12** $A = 1{,}5 \cdot {}^2\log(n) \Rightarrow \frac{dA}{dn} = 1{,}5 \cdot \frac{1}{n \cdot \ln(2)}$ [1p] $= \frac{1{,}5}{n \cdot \ln(2)}$ [1p]. Zowel de teller als de noemer van $\frac{dA}{dn}$ zijn positief dus $\frac{dA}{dn}$ is positief. Hieruit volgt dat A stijgt. [1p]
Als n stijgt, dan stijgt ook de noemer $n \cdot \ln(2)$ dus dan daalt $\frac{dA}{dn} = \frac{1{,}5}{n \cdot \ln(2)}$.
$\frac{dA}{dn}$ is positief en dalend en dat betekent dat A afnemend dalend is. [1p]

4p **13** Bij n kaarten is het aantal keren schudden $A(n) = 1{,}5 \cdot {}^2\log(n)$.
Bij vier keer zoveel kaarten is het aantal keren schudden $A(4n)$ [1p] en
$A(4n) = 1{,}5 \cdot {}^2\log(4n) =$
$1{,}5 \cdot ({}^2\log(4) + {}^2\log(n))$ [1p] $=$
$1{,}5 \cdot (2 + {}^2\log(n)) =$
$3 + 1{,}5 \cdot {}^2\log(n)$ [1p] $= 3 + A(n)$ dus $A(4n) = A(n) + 3$
Als het aantal kaarten vier keer zo groot wordt, hoeft er maar drie keer extra geschud te worden. [1p]

Zeepbellen

3p **14** $a = 4$ en $b = 2{,}5 \Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{2{,}5} - \frac{1}{4}$ [1p] $= 0{,}15 \Rightarrow$
$c = \frac{1}{0{,}15} = 6{,}66\ldots$ cm [1p] dus de gevraagde straal is 6,7 cm of 67 mm. [1p]

4p **15** Als $a = 3$ wordt de formule: $\frac{1}{c} = \frac{1}{b} - \frac{1}{3}$ [1p]
Als b kleiner wordt zal $\frac{1}{b}$ groter worden [1p], dus dan wordt ook $\frac{1}{b} - \frac{1}{3}$ groter.
Dan wordt ook $\frac{1}{c}$ groter [1p] en zal c juist kleiner worden. [1p]

3p **16** $\frac{1}{c} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a}{ab} - \frac{b}{ab}$ [1p] $= \frac{a-b}{ab}$ [1p] $\Rightarrow \frac{c}{1} = \frac{ab}{a-b} \Leftrightarrow c = \frac{ab}{a-b}$ [1p]

5p **17** c differentiëren met de quotiëntregel:
$c = \frac{3b}{3-b} \Rightarrow \frac{dc}{db} = \frac{(3-b) \cdot 3 - 3b \cdot (-1)}{(3-b)^2}$ [2p] $= \frac{9 - 3b + 3b}{(3-b)^2} = \frac{9}{(3-b)^2}$ [1p]
De teller van deze breuk is 9, dus positief, en de noemer $(3-b)^2$ is voor elke b tussen 0 en 3 ook positief dus de afgeleide is positief. Dus als b stijgt, dan stijgt c ook. [1p]
Maar als b daalt (van 3 naar 0) dan daalt c ook.
Als de straal van de kleinste zeepbel kleiner wordt, neemt c af. [1p]

Schildpadden

3p **18** Voor de schildpad van Jesse geldt $L = 15$ dus moet worden opgelost
$0{,}18 < \frac{G}{15^3} < 0{,}22$ [1p] $\Leftrightarrow 0{,}18 < \frac{G}{3375} < 0{,}22$
De grenzen berekenen:
$0{,}18 = \frac{G}{3375} \Leftrightarrow G = 0{,}18 \cdot 3375 = 607{,}5$ en $\frac{G}{3375} = 0{,}22 \Leftrightarrow G = 0{,}22 \cdot 3375 =$ 742,5 [1p] $\Rightarrow$
afgerond op hele grammen zijn de toegestane gewichten 608 t/m 742 gram. [1p]
Of: afgerond op hele grammen moet het gewicht tussen 607 en 743 gram liggen.

3p **19** Met de methode van foto 2 wordt L groter [1p], dus dan wordt $\frac{G}{L^3}$ kleiner want het gewicht blijft gelijk terwijl de noemer groter wordt. [1p] Bij meten met de methode van foto 2 is de Jackson Ratio kleiner dan de werkelijke waarde. [1p]

3p **20** Bij vraag 18 al berekend: $R = 0{,}18$ hoort bij $L = 15$ cm en $G = 607{,}5$ gram

Omrekenen: $W = \frac{G}{454} = \frac{607{,}5}{454} = 1{,}338...$ lbs en $l = \frac{L}{2{,}54} = \frac{15}{2{,}54} = 5{,}905...$ inch [1p]

Alle gegevens invullen in de Engelse formule:

$0{,}18 = c \cdot \frac{1{,}338...}{(5{,}905...)^3} \Leftrightarrow 0{,}18 = c \cdot 0{,}0064...$ [1p] $\Leftrightarrow c = \frac{0{,}18}{0{,}0064...} = 27{,}704...$

Afgerond op één decimaal: $c = 27{,}7$ [1p]
andere manier
De omrekenformules voor Engelse maten volgen uit de gegevens:
$G = 454 \cdot W$ en $L = 2{,}54 \cdot l$ [1p]

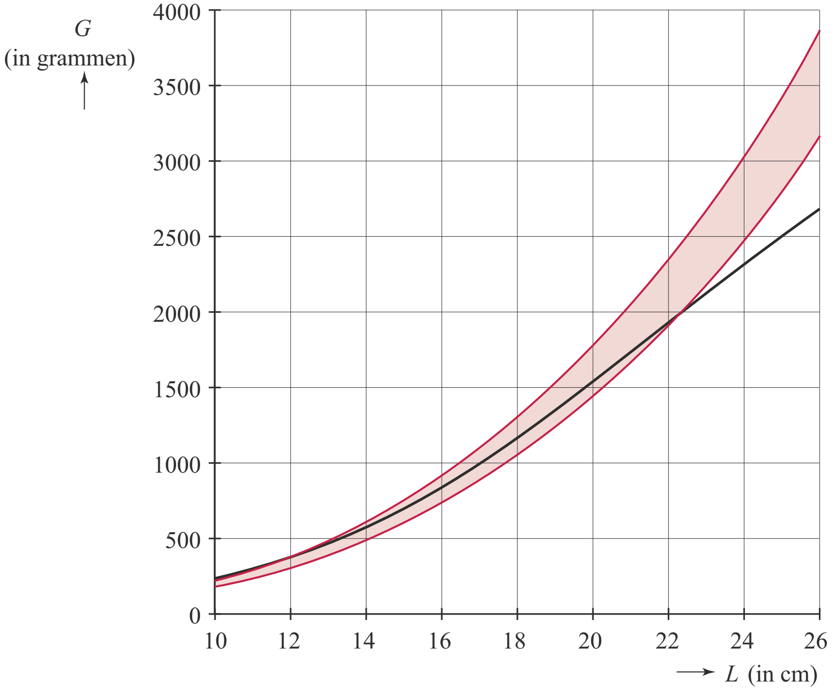
Substitutie van beide formules in $R = \frac{G}{L^3}$ geeft

$R = \frac{454 \cdot W}{(2{,}54 \cdot l)^3} = \frac{454}{2{,}54^3} \cdot \frac{W}{l^3}$ [1p] $\Rightarrow c = \frac{454}{2{,}54^3} = 27{,}704...$ dus afgerond $c = 27{,}7$. [1p]

6p **21** De grenzen van het gebied worden bepaald door $\frac{G}{L^3} = 0{,}18$ en $\frac{G}{L^3} = 0{,}22$. [2p]

Anders geschreven: $G = 0{,}18L^3$ en $G = 0{,}22L^3$. [1p]
Een tabel hierbij (afgerond op helen):

L	10	12	14	16	18	20	22	24	26
$0{,}18L^3$	180	311	494	737	1050	1440	1917	2488	3164
$0{,}22L^3$	220	380	604	901	1283	1760	2343	3041	3867



Met behulp van de punten uit de tabel kunnen de grensgrafieken worden getekend. [2p]
Het gevraagde gebied ligt tussen de twee getekende grensgrafieken. [1p]

Grotere windmolens

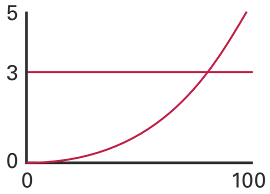
7p **22** De oude molens leveren in totaal $40 \cdot 0{,}75 = 30$ MW, dus de tien nieuwe windmolens moeten ten minste 3 MW per stuk leveren. [1p]
Bij een toename van 0,68% hoort een groeifactor $g = 1{,}0068$. [1p]

Uit de formule $h = 0{,}9 \cdot D$ volgt $D = \frac{h}{0{,}9}$. [1p]

Alle gegevens invullen in de formule van P geeft:

$3 = 2{,}21 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}0068^h \cdot \left(\frac{h}{0{,}9}\right)^2$ [1p]

Uit deze vergelijking kan met behulp van de rekenmachine de hoogte van de nieuwe windmolen worden berekend.
Voer in de rekenmachine in $y_1 = 2{,}21 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}0068^x \cdot \left(\frac{x}{0{,}9}\right)^2$ en $y_2 = 3$. [1p]



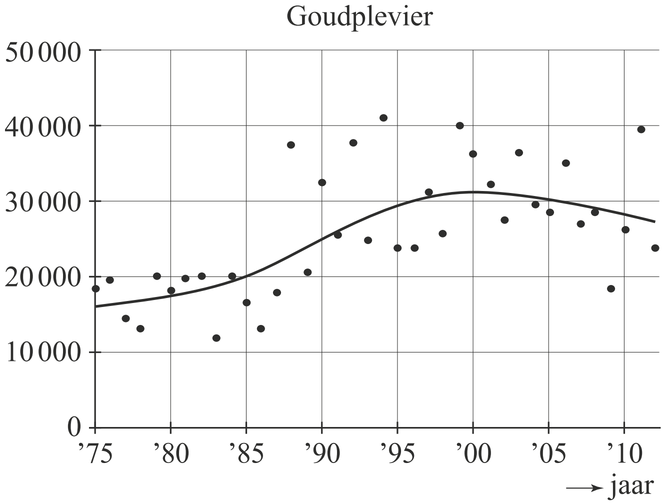
De optie *intersect/snijpunt* geeft $x = 79{,}96...$ [1p] dus de nieuwe windmolen moet ten minste 79,96... meter hoog worden.
De prijs per meter ashoogte is 25 000 euro dus dan gaan de 10 nieuwe windmolens samen ten minste $10 \cdot 25\,000 \cdot 79{,}96... \approx 19\,992\,347$ euro kosten.
Afgerond is de minimale investering 20 miljoen euro. [1p]

Examen 2019-I

Goudplevieren

Een goudplevier (zie foto) is een vogel die niet in Nederland broedt, maar tijdens zijn trektochten wel in Nederland te vinden is. Er zijn grote verschillen in aantallen goudplevieren tussen de verschillende jaren. In figuur 1 zijn de aantallen goudplevieren in Nederland in de jaren 1975 tot en met 2012 weergegeven als zwarte stippen.

figuur 1



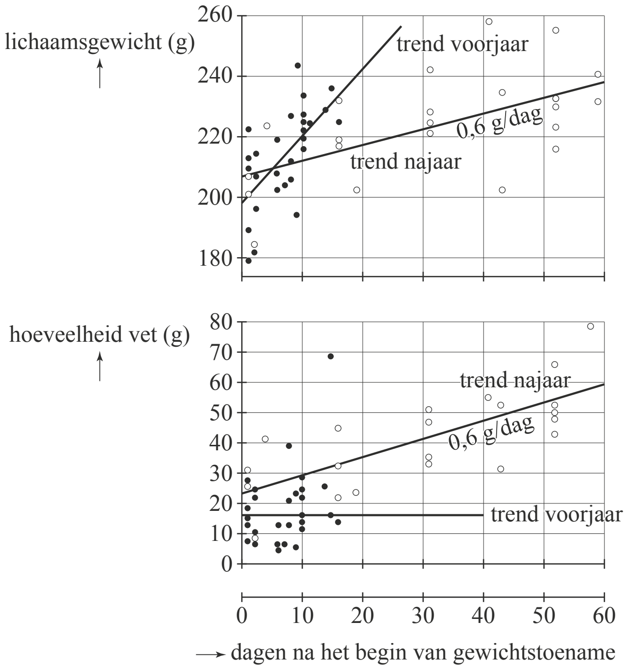
In figuur 1 is ook een kromme getekend die de trend aangeeft. We nemen aan dat vanaf 2003 deze trend een rechte lijn is en dat dit ook na 2012 zo blijft.

4p **1** Bereken hoeveel goudplevieren er volgens de trendlijn zijn in 2020. Geef je antwoord in gehele duizendtallen

Tijdens hun verblijf in Nederland bouwen de goudplevieren een reserve op voor de komende trektochten. Hierdoor nemen ze toe in gewicht.

In figuur 2 zie je het resultaat van een onderzoek naar deze gewichtstoename: van een aantal op verschillende tijdstippen gevangen goudplevieren is het gewicht en/of de hoeveelheid vet bepaald. De open stippen horen bij waarnemingen in het najaar en de dichte stippen bij waarnemingen in het voorjaar. Ook zijn de trendlijnen getekend.

figuur 2



Op grond van specifieke biologische kenmerken kunnen de onderzoekers bepalen wanneer de gewichtstoename van een goudplevier begint.
Aan de hand van de trendlijnen in figuur 2 kun je onderzoeken of de volgende stellingen waar zijn.

I In het voorjaar is de gemiddelde gewichtstoename per dag van een goudplevier ongeveer 2 keer zo groot als in het najaar.
II De gewichtstoename in het voorjaar bestaat niet uit vet.

4p **2** Onderzoek voor elk van beide stellingen of deze waar is.

Het **vetpercentage** van een vogel is de hoeveelheid lichaamsvet als percentage van het totale gewicht van de vogel. Met behulp van de trendlijnen in het voorjaar van zowel lichaamsgewicht als vethoeveelheid leiden de onderzoekers het volgende verband af:

$$P_{voorjaar} = \frac{1600}{2{,}3 \cdot t + 198}$$

Hierbij is $P_{voorjaar}$ het vetpercentage van de vogel in het voorjaar en t de tijd in dagen na het begin van de gewichtstoename.

5p **3** Laat zien, gebruikmakend van de punten (0, 198) en (20, 244), hoe deze formule is af te leiden uit de gegevens in de figuur.

3p **4** Beredeneer uitsluitend met behulp van de formule, zonder getallen in te vullen of een schets te maken, of het vetpercentage in het voorjaar toeneemt of juist afneemt.

Voor het vetpercentage in het najaar gaan we uit van de volgende formule:

$$P_{\text{najaar}} = \frac{2300 + 60t}{207 + 0{,}6t}$$

Hierin is P_{najaar} het vetpercentage van de vogel in het najaar en t de tijd in dagen na het begin van de gewichtstoename.

Met behulp van de afgeleide van P_{najaar} kan men onderzoeken of het vetpercentage P_{najaar} afnemend stijgend is.
6p **5** Stel de formule van de afgeleide van P_{najaar} op en onderzoek daarmee of P_{najaar} afnemend stijgend is.

Kentekens

Tussen mei 2008 en februari 2013 werd voor personenauto's de kentekenserie gebruikt die door de Rijksdienst voor het Wegverkeer **sidecode 7** genoemd wordt.
Hiernaast staat een van de eerste kentekens uit deze serie.

De kentekens bestaan uit twee cijfers, gevolgd door drie letters en tenslotte nog één cijfer.
Als we ervan uitgaan dat er geen beperkingen zijn aan de te gebruiken cijfers en letters, dan zijn er bijna 18 miljoen verschillende kentekens te maken met sidecode 7.

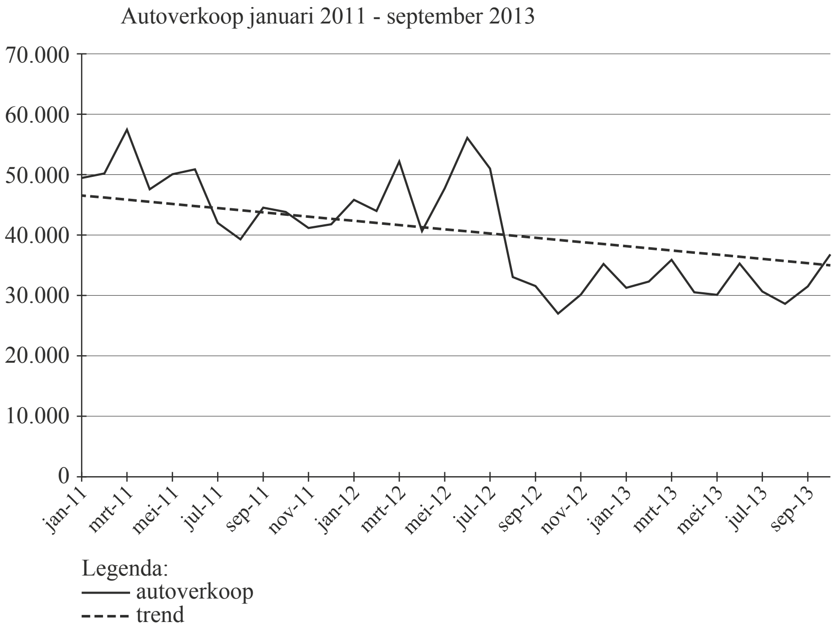
3p **6** Bereken het aantal verschillende kentekens met sidecode 7. Geef je antwoord in gehele honderdduizendtallen.

In deze opgave gaan we echter van de volgende beperkingen uit:
- Een kenteken mag niet met 00 beginnen
- De eerste letter is G, H, J, K, L, N, P, R, S, T, X of Z
- Klinkers (A, E, I, O, U, Y) worden niet gebruikt
- De letters C en Q worden niet gebruikt
- Bepaalde drielettercombinaties (zoals NSB) kunnen als aanstootgevend worden gezien en als gevolg daarvan zijn 82 drielettercombinaties uitgesloten.

Een verslaggever van een autotijdschrift schrijft in een artikel dat door al deze beperkingen minder dan 20% van alle mogelijke kentekens uiteindelijk op een personenauto terecht zal komen.
5p **7** Ga met een berekening na of de verslaggever gelijk heeft.

Vanaf 1 maart 2013 werd voor kentekens de serie **sidecode 8** gebruikt.
Sidecode 8 bevat eerst een cijfer, dan drie letters en tenslotte twee cijfers.
Sidecode 8 lijkt dus erg op sidecode 7 maar omdat er andere beperkingen gelden, zijn in totaal 1,46 miljoen kentekens beschikbaar voor personenauto's.

In oktober 2013 vraagt de verslaggever zich af tot wanneer deze serie (ongeveer) mee zal gaan. Hij maakt zelf een grafiek met daarin de verkoop van nieuwe personenauto's vanaf 2011. Ook maakt hij als bijpassend model een trendlijn met een afname van de verkoop van 375 nieuwe auto's per maand.



De formule die bij dit model hoort, is:

$$A_n = -375n + 37\,250$$

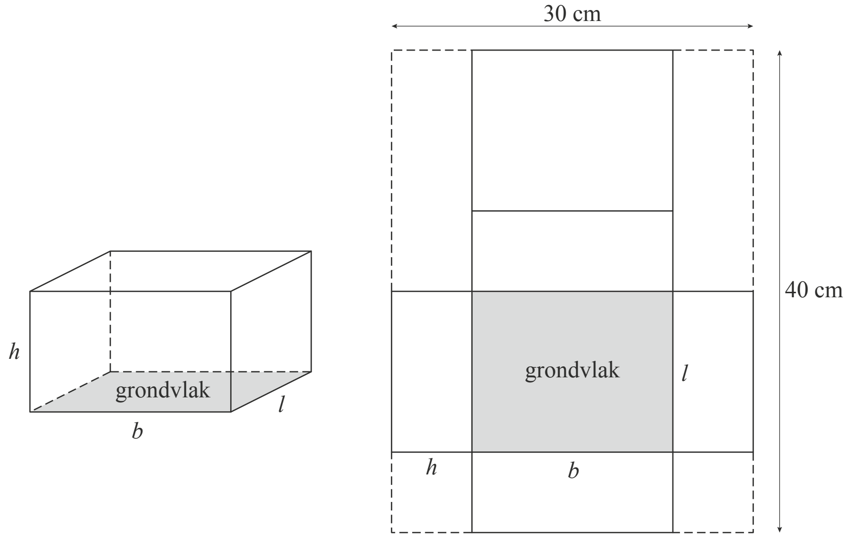
Hierbij is A_n het aantal verkochte nieuwe auto's in maand n met $n = 0$ voor maart 2013, de eerste maand waarin sidecode 8 gebruikt wordt.

Het model geeft voor mei 2013 een hoger aantal verkochte nieuwe auto's dan er volgens de grafiek werden verkocht.
3p **8** Bereken hoeveel procent hoger de uitkomst van het model is. Geef je antwoord in gehele procenten.

Er is ook een recursieve formule op te stellen bij dit model.
3p **9** Stel deze recursieve formule op.

Verpakkingen

Om een verpakking in de vorm van een balk te maken, wordt een karton van 30x40 cm gebruikt. In de afbeeldingen hieronder zie je links een verpakking en rechts hoe de uitslag daarvan uit het karton geknipt wordt. Hierbij is *h* de hoogte, *b* de breedte en *l* de lengte van de verpakking in cm. De uitslag eindigt precies bij de randen van het karton.



Van een bepaalde verpakking is de hoogte gelijk aan 3 cm.

3p **10** Bepaal de lengte en breedte van deze verpakking en bereken daarmee vervolgens de inhoud van deze verpakking.

De formule voor de inhoud V in cm^3 van de verpakking uitgedrukt in de hoogte h in cm is:

$$V = 2h^3 - 70h^2 + 600h$$

4p **11** Toon, zonder getallenvoorbeelden, aan dat deze formule juist is.

Met behulp van deze formule is vast te stellen voor welke hoogte h (met $h \leq 15$) de inhoud maximaal is.

3p **12** Bereken met behulp van differentiëren bij welke hoogte de inhoud maximaal is. Geef je antwoord in één decimaal.

Efficiëntie van een verpakking

Bedrijven willen zo efficiënt mogelijk omgaan met verpakkingsmateriaal. Meestal is er een vaststaande inhoud en wil men dat de oppervlakte van de verpakking zo klein mogelijk wordt, maar je kunt het ook andersom bekijken: bij een bepaalde oppervlakte wil je een verpakking met zo groot mogelijke inhoud. De maximale inhoud krijg je als je een bol neemt, maar een bol als verpakkingsmateriaal is vaak niet handig.

Om de efficiëntie E van een verpakking met een inhoud V en een oppervlakte A te weten te komen, vergelijk je de inhoud V van die verpakking met de inhoud van een bol met diezelfde oppervlakte A.

Er geldt:

formule 1: $E = \dfrac{\text{inhoud } V \text{ van verpakking met oppervlakte } A}{\text{inhoud van bol met oppervlakte } A}$

Voor een bol geldt het volgende:

formule 2: Oppervlakte bol $= 12{,}57r^2$

formule 3: Inhoud bol $= 4{,}19r^3$

In deze formules is r de straal van de bol.

Uitgaande van de formules 1, 2 en 3 geldt voor de efficiëntie van een verpakking de volgende formule:

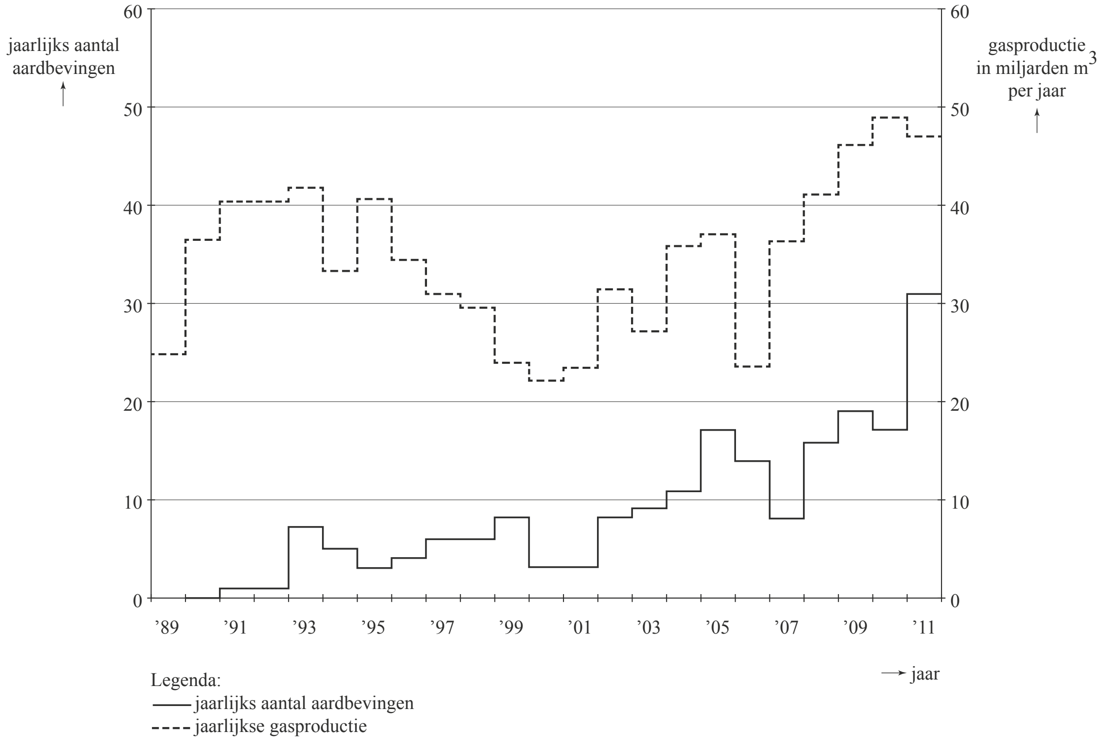
$$E = \frac{V}{4{,}19\left(\sqrt{0{,}08A}\right)^3}$$

4p **13** Toon met de formules 1, 2 en 3 aan dat deze laatste formule juist is.

Groningse aardbevingen

In de provincie Groningen vinden, als gevolg van gasproductie, regelmatig aardbevingen plaats. In 2013 is daar grootschalig onderzoek naar gedaan. Zo werd er gekeken naar het verband tussen de gasproductie en aardbevingen. Enkele resultaten daarvan staan in figuur 1. Hier zie je bijvoorbeeld dat er in 1993 zeven aardbevingen zijn geweest en er in datzelfde jaar 42 miljard kubieke meter gas is geproduceerd.

figuur 1



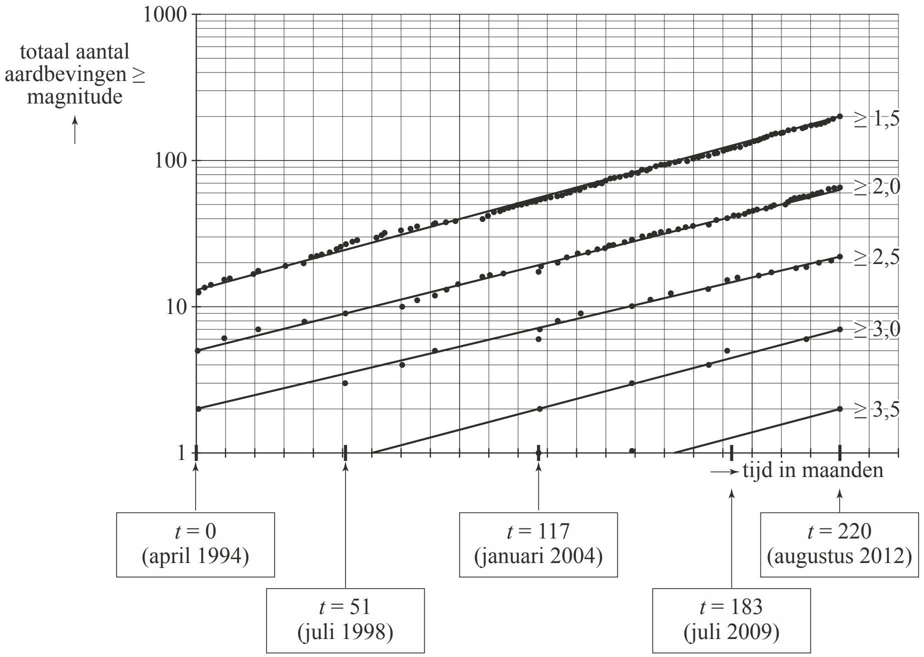
We bekijken de volgende drie beweringen:
1 De gasproductie en het aantal aardbevingen zijn over de gehele periode 2000-2011 procentueel evenveel gestegen.
2 Als na 2000 de gasproductie daalt, dan heeft dat altijd een jaar later ook een daling van het aantal aardbevingen tot gevolg.
3 In de periode 2005-2011 is de gemiddelde stijging per jaar van het aantal aardbevingen groter dan in de periode 1998-2004.

5p **14** Geef van elke bewering aan of deze waar is of niet. Gebruik in je toelichting gegevens uit figuur 1.

De **magnitude**, de kracht van een aardbeving, wordt uitgedrukt in een getal op de schaal van Richter.
In figuur 2 zijn de Groningse aardbevingen vanaf 1994 verzameld en ingedeeld naar sterkte. Dat geeft bij een logaritmische schaalverdeling langs de verticale as een opvallend patroon: alle grafieken zijn bij benadering evenwijdige rechte lijnen.

Elke stip in deze figuur stelt een aardbeving van een zekere magnitude voor: zo kun je zien dat er vlak voor juli 2009 een aardbeving van magnitude ≥ 3,0 heeft plaatsgevonden: die aardbeving zie je dus ook terug bij de aardbevingen van de klassen ≥ 2,5; ≥ 2,0 en ≥ 1,5.

figuur 2



In het onderzoek werden alleen aardbevingen bekeken die schade zouden kunnen veroorzaken. Omdat aardbevingen met een magnitude van minder dan 1,5 geen schade aanrichten, zijn deze niet in figuur 2 opgenomen.

3p **15** Bereken voor augustus 2012 hoeveel procent van het aantal aardbevingen van magnitude ≥ 2,0 een magnitude van 2,5 of hoger heeft.
Geef je antwoord in gehele procenten.

Het feit dat de grafieken in figuur 2 evenwijdige rechte lijnen zijn, betekent dat het aantal aardbevingen van elke klasse exponentieel toeneemt met dezelfde groeifactor. Het totaal aantal aardbevingen A voor magnitudes ≥ 1,5 is te beschrijven met de volgende formule:

$A = 12 \cdot e^{0,013t}$ met $t = 0$ voor april 1994 en t in maanden.

4p **16** Bereken door middel van differentiëren de waarde van de afgeleide van A voor $t = 117$. Geef je antwoord in één decimaal en leg uit wat de betekenis van deze waarde is in deze situatie.

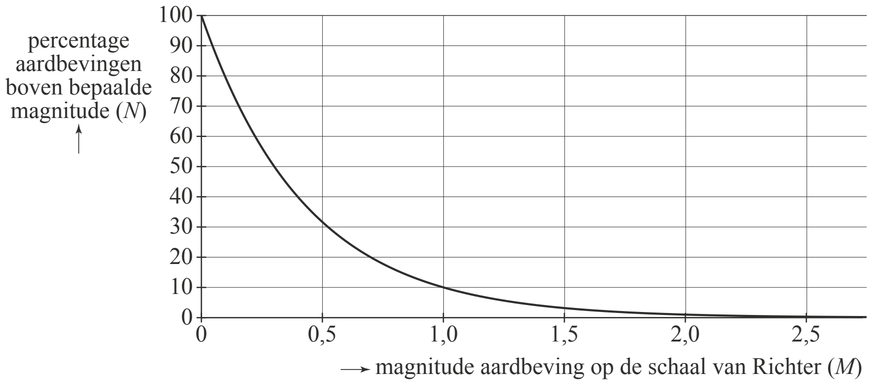
De formules van de overige lijnen in figuur 2 kunnen worden afgeleid van die voor de magnitudes ≥ 1,5. Bekijk de grafiek voor de magnitudes ≥ 2,0. Deze grafiek is 85 maanden later op dezelfde hoogte als de grafiek voor magnitudes ≥ 1,5.

Hieronder staan vier formules. Een van de vier is juist voor de magnitudes ≥ 2,0:
A $A_{2,0} = 12 \cdot e^{0,013(t+85)}$ met $t = 0$ voor april 1994
B $A_{2,0} = 12 \cdot e^{0,013(t-85)}$ met $t = 0$ voor april 1994
C $A_{2,0} = 12 \cdot e^{0,013t+85}$ met $t = 0$ voor april 1994
D $A_{2,0} = 12 \cdot e^{0,013t-85}$ met $t = 0$ voor april 1994

3p **17** Beredeneer welke van de vier formules juist is.

In een rapport van het Staatstoezicht op de Mijnen wordt geconstateerd dat er een duidelijk verband is tussen de magnitude en het percentage aardbevingen boven die magnitude. In figuur 3 is dat verband weergegeven.

figuur 3



Zo is bijvoorbeeld af te lezen dat 10% van de aardbevingen een magnitude boven de 1,0 heeft.
Bij deze grafiek hoort de volgende formule:

$N = 10^{a-M}$

Hierbij is M de magnitude en N het percentage van de aardbevingen boven magnitude M.

3p **18** Laat met een berekening zien dat geldt: $a = 2$.

Omgekeerd kun je je ook afvragen welke magnitude de (bijvoorbeeld) 20% zwaarste aardbevingen minstens hadden. Om vragen als deze te beantwoorden, is het handig de formule te herschrijven.
De formule $N = 10^{2-M}$ is te herleiden tot $M = p + q \cdot \log(N)$.

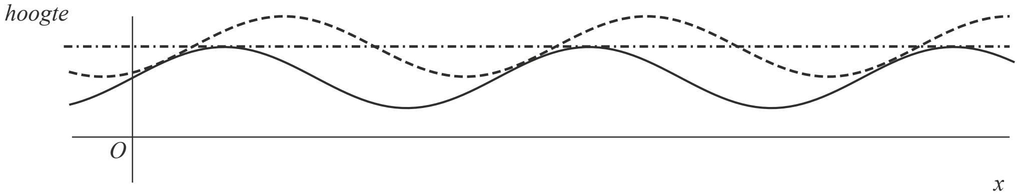
3p **19** Bereken p en q.

Zandpad

Langs het Zandpad in Utrecht staat een hek dat bestaat uit twee sinusoïden, die elkaar raken.

In de figuur hieronder zijn de twee sinusoïden in het hek schematisch weergegeven.

figuur



De formule die bij de onderste sinusoïde hoort, luidt:

$$S_{\text{onderste}} = 100 + 50\sin(\frac{\pi}{3}x)$$

Hierbij is S_{onderste} de hoogte in centimeters en x de afstand tot het beginpunt op de evenwichtsstand in meters.
De toppen van de onderste sinusoïde liggen op de evenwichtsstand van de bovenste sinusoïde. De amplitudes van beide sinusoïden zijn gelijk. Verder is gegeven dat de twee sinusoïden elkaar bij $x = \frac{1}{2}$ en ook bij $x = 6\frac{1}{2}$ raken.

8p **20** Geef de formule voor de bovenste sinusoïde en licht toe hoe je je antwoord gevonden hebt.

Hints bij examen 2019-I

1 Lees de coördinaten af van twee punten van de grafiek (dus geen stippen) en bereken hiermee de richtingscoëfficiënt van de trendlijn. Reken hiermee verder tot 2020.

2 Lees de richtingscoëfficiënt van de trend voorjaar af. De richtingscoëfficiënt van de trend najaar staat in de figuur vermeld.

3 Leid het lineaire verband in de noemer af uit de gegevens. Verklaar waarom in de teller 1600 staat.

4 Ga na wat er met de teller en de noemer gebeurt als t toeneemt. En wat dit betekent voor de hele breuk.

5 Differentieer met de quotiëntregel.

6 Er zijn 10 verschillende cijfers en 26 verschillende letters.

7 Bereken eerst hoeveel mogelijkheden er overblijven voor de eerste twee cijfers en voor de drie letters.

8 Lees in de figuur de autoverkoop in mei 2013 af.
Ga na welke waarde van n hoort bij mei 2013 en bereken hiermee de autoverkoop met het model.

9 De formule $A_n = -375n + 37\,250$ is lineair, dus de recursieve formule is van de vorm $A_n = A_{n-1} + \ldots$. Vergeet niet de startterm te vermelden.

10 Lees in de figuur af dat $h + b + h = 30$ en bereken hiermee de breedte b. Doe (ongeveer) hetzelfde voor de lengte.
De formule voor de inhoud van een balk is $l \cdot b \cdot h$.

11 Druk zowel l als b uit in h en vul deze formules in in $V = l \cdot b \cdot h$.

12 Voor een maximum moet de afgeleide van V nul zijn en dalend door de x-as gaan.

13 Druk r uit in A.

14 Bewering 1 gaat over een procentuele verandering, terwijl bewering 3 gaat over een gemiddelde verandering per jaar. Zoek bij bewering 2 een tegenvoorbeeld.

15 Lees de betreffende aantallen af in de figuur.

16 Differentiëren met de kettingregel. Ga na welke maand hoort bij $t = 117$. Een afgeleide functie beschrijft altijd de snelheid van verandering.

17 De grafiek voor magnitudes ≥ 2,0 ligt 85 maanden rechts van de grafiek van magnitudes ≥ 1,5. Wat voor gevolgen heeft zo'n verschuiving naar rechts voor de formule?

18 Vul een bekende combinatie van N en M in de formule in.

19 Gebruik $g^a = b \Leftrightarrow a = {}^g\log(b)$.

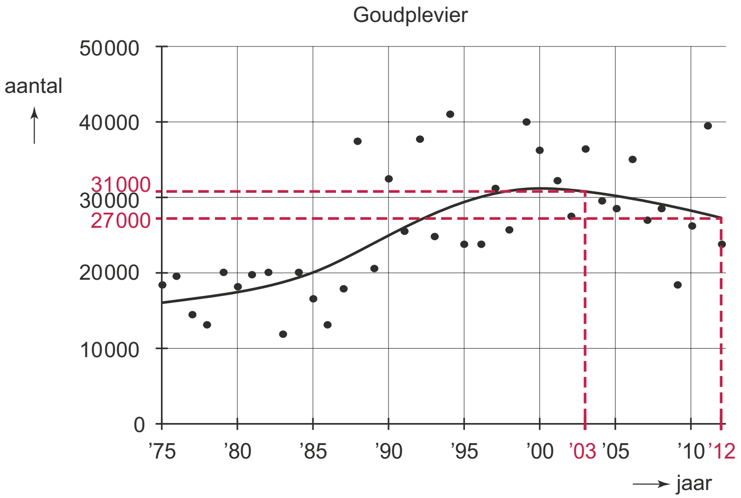
20 Een deel van de parameters van de formule van de bovenste sinusoïde volgt direct uit die van de onderste. Gebruik het raakpunt van de grafieken om te berekenen voor welke waarde van x de bovenste grafiek stijgend door de evenwichtsstand gaat.

©ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij examen 2019-I

Goudplevieren

4p **1** Aflezen in de figuur.



In 2003 waren er 31 000 goudplevieren en in 2012 waren er 27 000. [1p]

De afname van het aantal goudplevieren is in deze periode $\frac{27\,000 - 31\,000}{2012 - 2003} = -444{,}4...$ per jaar [1p], dus in 2020 (acht jaar na 2012) zijn er $27\,000 - 8 \times 444{,}4... \approx 23\,444$. [1p]
Afgerond op duizendtallen zijn dat er 23 000. [1p]
Als je afleest (2005, 30 000) en (2012, 27 000) kom je voor het jaar 2020 uit op 24 000 goudplevieren. Dat wordt ook goed gerekend.

4p **2** De trendlijn van het lichaamsgewicht in het voorjaar stijgt in 20 dagen van 198 naar 244 gram, dus de gemiddelde gewichtstoename per dag is $\frac{244 - 198}{20} = 2{,}3$ gram. [1p]
In de figuur staat vermeld dat de gemiddelde gewichtstoename in het najaar 0,6 gram per dag is, dus in het voorjaar is de gemiddelde gewichtstoename per dag niet tweemaal, maar bijna viermaal zo groot.
Stelling I is niet waar. [1p]

De trendlijn van de hoeveelheid vet in het voorjaar is horizontaal, dus de hoeveelheid vet neemt in het voorjaar niet toe. [1p]
Stelling II is wel waar. [1p]

5p **3** De trendlijn van het totale gewicht TG in het voorjaar is lineair, dus de vorm van de formule is $TG = a \cdot t + b$.
De richtingscoëfficiënt $a = 2{,}3$ [1p] (zie vorige vraag) en het startgetal $b = 198$, dus $TG = 2{,}3 \cdot t + 198$. [1p]
De hoeveelheid vet van de goudplevier is in het voorjaar constant 16 gram [1p], dus het vetpercentage van de vogel in het voorjaar is $P_{voorjaar} = \frac{16}{TG} \cdot 100 = \frac{1600}{2{,}3 \cdot t + 198}$. [2p]

3p **4** Als t toeneemt, dan neemt ook $2{,}3 \cdot t + 198$ toe. [1p]
De breuk $\frac{1600}{2{,}3 \cdot t + 198}$ heeft een constante teller [1p] en een noemer die toeneemt, dus de uitkomst van deze breuk neemt af als t toeneemt.
Het vetpercentage neemt in het voorjaar af. [1p]

6p **5** Differentiëren met de quotiëntregel.

$P_{najaar} = \frac{2300 + 60t}{207 + 0{,}6t} \Rightarrow P'_{najaar} = \frac{(207 + 0{,}6t) \cdot 60 - (2300 + 60t) \cdot 0{,}6}{(207 + 0{,}6t)^2}$ [1p] $\Rightarrow$

$P'_{najaar} = \frac{12\,420 + 3{,}6t - 1380 - 3{,}6t}{(207 + 0{,}6t)^2} = \frac{11\,040}{(207 + 0{,}6t)^2}$ [1p]

Zowel de teller als de noemer van deze breuk zijn positief, dus $P'_{najaar} > 0$ [1p] $\Rightarrow$ P stijgt. [1p]
Als t toeneemt, neemt ook $207 + 0{,}6t$ toe en dan neemt ook $(207 + 0{,}6t)^2$ toe.
De teller van P'_{najaar} is 11 040 (constant), dus als de noemer toeneemt, zal P'_{najaar} dalen. [1p]
P'_{najaar} is positief en dalend, dus dan zal P_{najaar} afnemend stijgen. [1p]

Kentekens

3p **6** Er zijn 10 verschillende cijfers en 26 verschillende letters, dus het aantal verschillende kentekens is $10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10$ [2p] = 17 576 000.
Afgerond op honderdduizendtallen zijn dat er 17 600 000 (of 17,6 miljoen). [1p]

5p **7** Voor de eerste twee cijfers vervalt alleen 00, dus er blijven 99 mogelijkheden over. [1p]
Voor de eerste letter zijn er 12 mogelijkheden, voor elk van de overige twee letters 18 mogelijkheden. [1p] Omdat er 82 drielettercombinaties uitgesloten zijn, blijven er $12 \cdot 18 \cdot 18 - 82 = 3806$ drielettercombinaties over. [1p]
Voor het laatste cijfer zijn nog steeds 10 mogelijkheden.
Met de beperkingen die in de opgave worden genoemd, kunnen nog $99 \cdot 3806 \cdot 10 = 3\,767\,940$ verschillende kentekens worden gemaakt. [1p]
Dat is $\frac{3\,767\,940}{17\,576\,000} \cdot 100 \approx 21{,}4\%$ van alle mogelijke kentekens, dus de verslaggever heeft niet gelijk. [1p]

3p **8** In de figuur is af te lezen dat in mei 2013 ongeveer 30 000 auto's werden verkocht. [1p]
Voor mei 2013 geldt $n = 2$ en de bijbehorende modeluitkomst is $A_2 = -375 \cdot 2 + 37\,250 = 36\,500$. [1p]
De modeluitkomst is $\frac{36\,500 - 30\,000}{30\,000} \cdot 100 = 21{,}66...\%$ hoger.
Afgerond op hele procenten: 22% hoger. [1p]

3p **9** De gegeven lineaire formule $A_n = -375n + 37\,250$ start voor $n = 0$ met 37 250 en neemt per maand met 375 af.
Een recursieve formule hierbij is: $A_n = A_{n-1} - 375$ [2p] met $A_0 = 37\,250$. [1p]

Verpakkingen

3p **10** Uit de figuur blijkt $h + b + h = 30 \Rightarrow b = 30 - 2h$. Als $h = 3$ is $b = 30 - 2 \cdot 3 = 24$ cm. [1p]
In de figuur is ook te zien dat $h + l + h + l = 40$. Dus $2l = 40 - 2h \Rightarrow l = 20 - h$.
Als $h = 3$ is $l = 20 - 3 = 17$ cm. [1p]
De inhoud van de verpakking is $l \cdot b \cdot h = 17 \cdot 24 \cdot 3 = 1224\ \text{cm}^2$. [1p]

4p **11** Uit de vorige vraag volgt $b = 30 - 2h$ [1p] en $l = 20 - h$. [1p]
Invullen in $V = l \cdot b \cdot h$ geeft:
$V = (20 - h) \cdot (30 - 2h) \cdot h = (600 - 40h - 30h + 2h^2) \cdot h = (600 - 70h + 2h^2) \cdot h =$
$600h - 70h^2 + 2h^3 = 2h^3 - 70h^2 + 600h$ [1p]

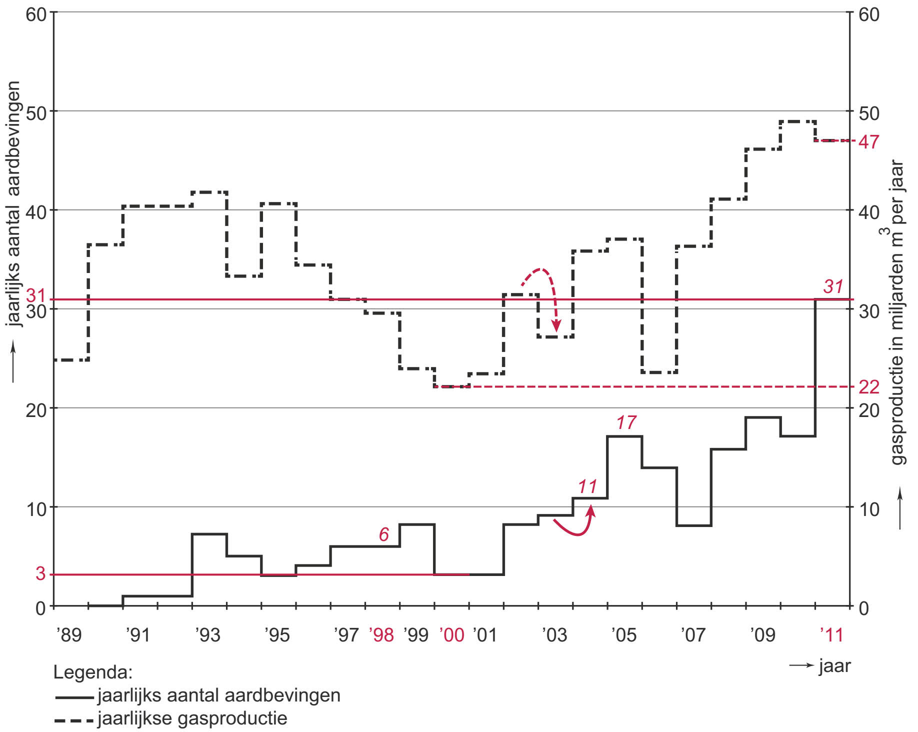
3p **12** $V' = 6h^2 - 140h + 600$ [1p]
Voer in de rekenmachine in: $y_1 = 6x^2 - 140x + 600$ op domein [0, 15].
De optie *zero/nulpunt* geeft $x = 5{,}657...$ en in een plot van y_1 is te zien dat de hellingfunctie voor $x = 5{,}657...$ [1p] dalend door de x-as gaat, dus voor $h \approx 5{,}7$ cm [1p] is de inhoud maximaal.

4p **13** Uit formule 2 volgt dat voor een bol met oppervlakte A geldt:
$A = 12{,}57\,r^2 \Leftrightarrow r^2 = \frac{A}{12{,}57}$ [1p] $\Rightarrow r = \sqrt{\frac{A}{12{,}57}} = \sqrt{\frac{1}{12{,}57} \cdot A} \approx \sqrt{0{,}08 \cdot A}$ [1p]
Volgens formule 3 geldt: de inhoud van een bol met oppervlakte A is $4{,}19r^3$.
Deze resultaten invullen in formule 1:

$$E = \frac{\text{inhoud } V \text{ van verpakking met oppervlakte } A}{\text{inhoud van bol met oppervlakte } A} = \frac{V}{4{,}19\,r^3} = \frac{V}{4{,}19\left(\sqrt{0{,}08A}\right)^3}$$ [2p]

Groningse aardbevingen

5p **14** Bewering 1 (aflezen bij 2000 en 2011 in de figuur):
In 2000 was de gasproductie 22 miljard m³ en waren er 3 aardbevingen.
In 2011 was de gasproductie 47 miljard m³ en waren er 31 aardbevingen.

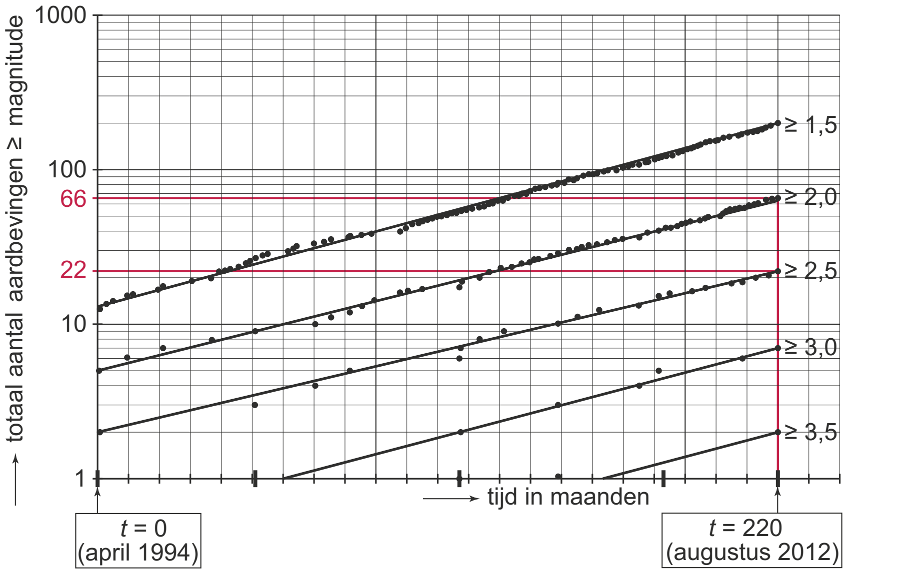


De gasproductie stijgt in deze periode met $\frac{47 - 22}{22} \cdot 100 \approx 114\%$ [1p], terwijl het aantal aardbevingen stijgt met $\frac{31 - 3}{3} \cdot 100 \approx 933\%$, dus bewering 1 is niet waar. [1p]

Bewering 2 (zie de pijltjes in de figuur hierboven):
In 2003 daalt de gasproductie ten opzichte van 2002, maar een jaar later, in 2004, stijgt het aantal aardbevingen ten opzichte van 2003, dus bewering 2 is niet waar. [1p]

Bewering 3 (zie de cursieve getallen in de figuur):
In de periode 1998-2004 stijgt het aantal aardbevingen van 6 naar 11.
Dat is een gemiddelde stijging van $\frac{11 - 6}{6} = \frac{5}{6} \approx 0{,}83$ per jaar. [1p]
In de periode 2005-2011 stijgt het aantal aardbevingen van 17 naar 31.
Dat is een gemiddelde stijging van $\frac{31 - 17}{6} = \frac{14}{6} \approx 2{,}3$ per jaar.
Bewering 3 is dus waar. [1p]

3p **15** Aflezen in de figuur.



Tot en met augustus 2012 hadden er ongeveer 66 aardbevingen met magnitude ≥ 2,0 plaatsgevonden. [1p] Van deze 66 hadden er ongeveer 22 een magnitude ≥ 2,5. [1p]
Het gevraagde percentage is $\frac{22}{66} \cdot 100 = 33{,}3... \approx 33\%$. [1p]
Kleine afwijkingen in het aflezen geven een afwijkend maar acceptabel resultaat. Bijvoorbeeld 67 en 21 geven 31%.

4p **16** Differentiëren met de kettingregel.
$A = 12 \cdot e^{0{,}013t} \Rightarrow A' = 12 \cdot e^{0{,}013t} \cdot 0{,}013 = 0{,}156 \cdot e^{0{,}013t}$ [1p]
$t = 117$ invullen geeft $A'(117) = 0{,}156 \cdot e^{0{,}013 \cdot 117} = 0{,}713...$ afgerond 0,7. [1p]
$t = 117$ komt overeen met januari 2004, dus de uitkomst van $A'(117)$ betekent dat het totaal aantal aardbevingen met magnitude ≥ 1,5 in de maand januari 2004 stijgt met een snelheid van 0,7 per maand. [2p]

3p **17** De grafiek voor magnitudes ≥ 2,0 is 85 maanden naar rechts verschoven ten opzichte van de grafiek van magnitudes ≥ 1,5. In de formule $A = 12 \cdot e^{0{,}013t}$ moet t dan vervangen worden door $t - 85$. [2p] De juiste formule is dus B. [1p]

3p **18** Voor $M = 0$ geldt $N = 100$. [1p]
Deze gegevens invullen in de formule: $100 = 10^{a-0}$ [1p] $\Leftrightarrow$ $10^2 = 10^a$ $\Leftrightarrow$ $a = 2$ [1p]
andere manier
Voor $M = 1$ geldt $N = 10$. [1p]
Deze gegevens invullen in de formule: $10 = 10^{a-1}$ [1p] $\Leftrightarrow$ $10^1 = 10^{a-1}$ $\Leftrightarrow$
$a - 1 = 1$ $\Leftrightarrow$ $a = 2$ [1p]

3p **19** $N = 10^{2-M}$ $\Leftrightarrow$ $2 - M = {}^{10}\log(N)$ [1p] $\Leftrightarrow$ $M = 2 - \log(N)$ [1p]
Dus $p = 2$ en $q = -1$. [1p]

Zandpad

8p **20** De formule van de bovenste sinusoïde is van de vorm $S_{\text{bovenste}} = a + b\sin(\,c(x-d)\,)$. [1p]
De amplitudes van beide sinusoïden zijn gelijk, dus geldt $b = 50$. [1p]
De toppen van de onderste sinusoïde liggen op de evenwichtsstand van de bovenste, dus geldt $a = 100 + 50 = 150$. [1p]

Omdat de twee sinusoïden elkaar raken hebben ze dezelfde periode, dus geldt $c = \frac{\pi}{3}$. [1p]

De sinusoïden raken elkaar voor $x = \frac{1}{2}$ dus moet gelden $S_{\text{bovenste}}\left(\frac{1}{2}\right) = S_{\text{onderste}}\left(\frac{1}{2}\right)$.

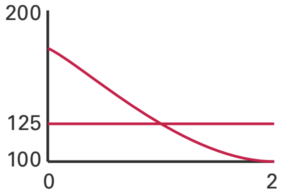
$S_{\text{onderste}}\left(\frac{1}{2}\right)$ kunnen we uitrekenen:

$S_{\text{onderste}}\left(\frac{1}{2}\right) = 100 + 50\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}\right) = 100 + 50\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 100 + 50\cdot\frac{1}{2} = 125$. [1p]

Opgelost moet nu worden: $S_{\text{bovenste}}\left(\frac{1}{2}\right) = 125$

Voer in de rekenmachine in: $y_1 = 150 + 50\sin\left(\frac{\pi}{3}(\frac{1}{2} - x)\right)$ en $y_2 = 125$. [1p]

Merk op dat de x die je in de rekenmachine invoert eigenlijk de d is uit de formule.



De optie *intersect/snijpunt* geeft $x = 1$ [1p] dus $d = 1$.

De gevraagde formule is: $S_{\text{bovenste}} = 150 + 50\sin\left(\frac{\pi}{3}(x-1)\right)$ [1p]

Omdat de periode van de sinusoïde 6 is, kun je voor d ook getallen kiezen die een zesvoud van 1 verschillen, zoals bijvoorbeeld −5, 7 of 13.

©ThiemeMeulenhoff

Examen 2019-II

Continu Vakantie Onderzoek

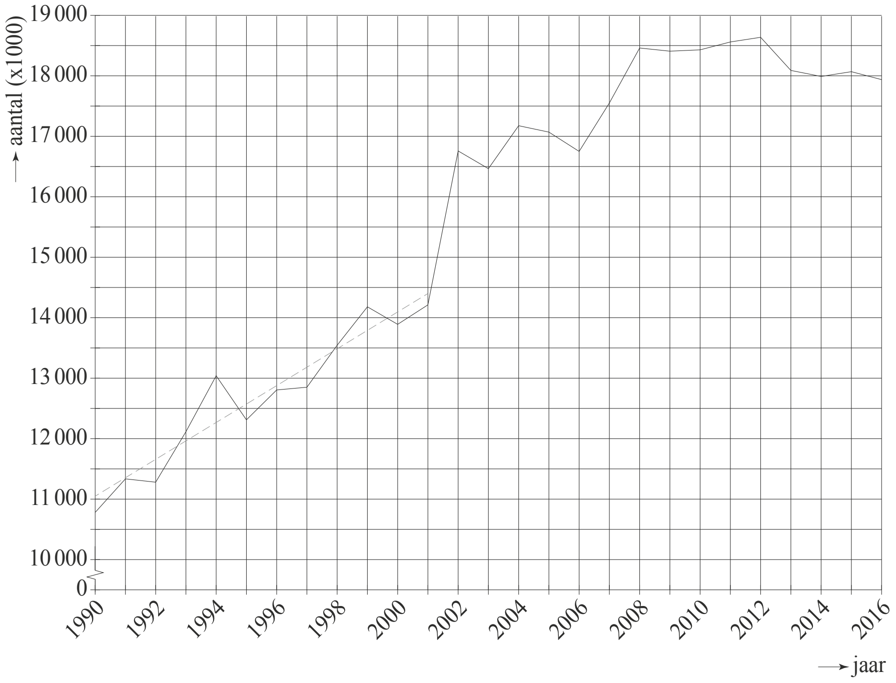
Het Centraal Bureau voor de Statistiek (CBS) doet sinds 1990 jaarlijks onderzoek naar het vakantiegedrag van Nederlanders. Dit onderzoek wordt het Continu Vakantie Onderzoek (CVO) genoemd.
Bij dit onderzoek gaat het CBS niet uit van alle Nederlanders. Mensen die niet op vakantie kunnen doordat ze bijvoorbeeld in een instelling zitten, doen niet mee in het onderzoek. De onderzochte populatie wordt de CVO- populatie genoemd. Deze is dus kleiner dan de hele Nederlandse populatie.

Uit het CVO blijkt dat 80,7% van de CVO-populatie in 2016 ten minste één keer op vakantie is geweest. Deze 80,7% ging maar liefst 35,5 miljoen keer op vakantie: een gemiddelde van 2,78 vakanties per persoon.
Met behulp van deze gegevens is de omvang van de CVO-populatie in 2016 te berekenen.

3p **1** Bereken de omvang van de CVO-populatie in 2016. Geef je antwoord in gehele duizendtallen.

In het vervolg van deze opgave zullen we de CVO-populatie gewoon ‘Nederlanders’ noemen. Uit het CVO blijkt dat het aantal vakanties naar het buitenland in de loop van de jaren behoorlijk veranderd is. In figuur 1 is het verloop van het aantal buitenlandse vakanties weergegeven.

figuur 1 aantal buitenlandse vakanties



In figuur 1 is bovendien de trendlijn voor het verloop van het aantal buitenlandse vakanties met een stippellijn in de periode tot en met 2001 weergegeven.

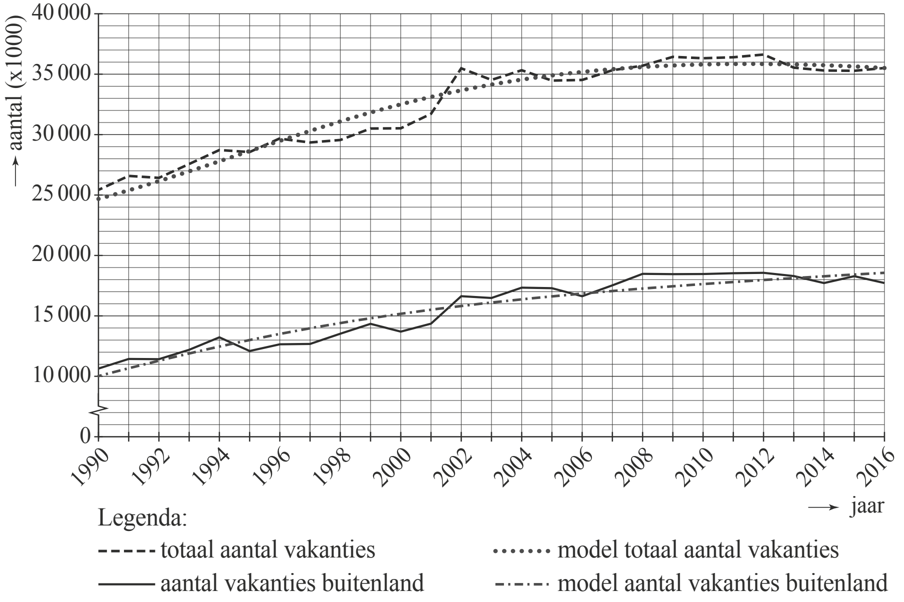
Hoewel het CVO pas sinds 1990 plaatsvindt, is er, gebruikmakend van de trendlijn tot en met 2001, toch een uitspraak te doen over het aantal buitenlandse vakanties in de periode voorafgaand aan 1990.

4p **2** Bereken met behulp van lineair extrapoleren het aantal buitenlandse vakanties in 1985.

In figuur 1 is te zien dat de lineaire trend die er tot en met 2001 was, eindigt. In 2002 is er een forse toename. Die is te verklaren doordat het CBS sinds 2002 één of meer overnachtingen bij familie in het buitenland ook als een vakantie telt, terwijl dat in de jaren ervoor niet het geval was.

In figuur 2 is nogmaals het aantal buitenlandse vakanties weergegeven. Verder is ook het verloop van het totaal aantal vakanties (in binnen- en buitenland samen) weergegeven. Bovendien is voor beide een model opgesteld en weergegeven. Die modellen komen pas na de volgende vraag aan de orde.

figuur 2 aantal vakanties in binnen- en buitenland



3p **3** Onderzoek met behulp van de werkelijke aantallen in figuur 2 of het percentage buitenlandse vakanties als percentage van het totaal aantal vakanties in de periode 2002 – 2016 is toe- of afgenomen.

Bij de modellen in figuur 2 horen de volgende formules:

$B = -10{,}1t^2 + 587t + 10\,200$ en $T = -20{,}3t^2 + 951t + 24\,800$

In dit model is B het aantal buitenlandse vakanties per jaar, T het totaal aantal vakanties per jaar en t de tijd in jaren met $t = 0$ in het jaar 1990.
B en T zijn beide in duizenden.

Volgens bovenstaand model had het aantal binnenlandse vakanties ook een maximum.

4p **4** Bereken in welk jaar dat was.

Het CBS onderzoekt ook hoe lang mensen op vakantie gaan. Hoewel Nederlanders steeds vaker op vakantie gaan, worden deze vakanties steeds korter.

Een model dat het aantal vakanties per jaar en de lengte van deze vakanties beschrijft, is:

$A = 0{,}0136t + 2{,}43$ en $L = -0{,}024t + 9{,}3$

In dit model is A het gemiddelde aantal vakanties per jaar per Nederlander, L de gemiddelde lengte van een vakantie in dagen, en t is weer de tijd in jaren met $t = 0$ in het jaar 1990.

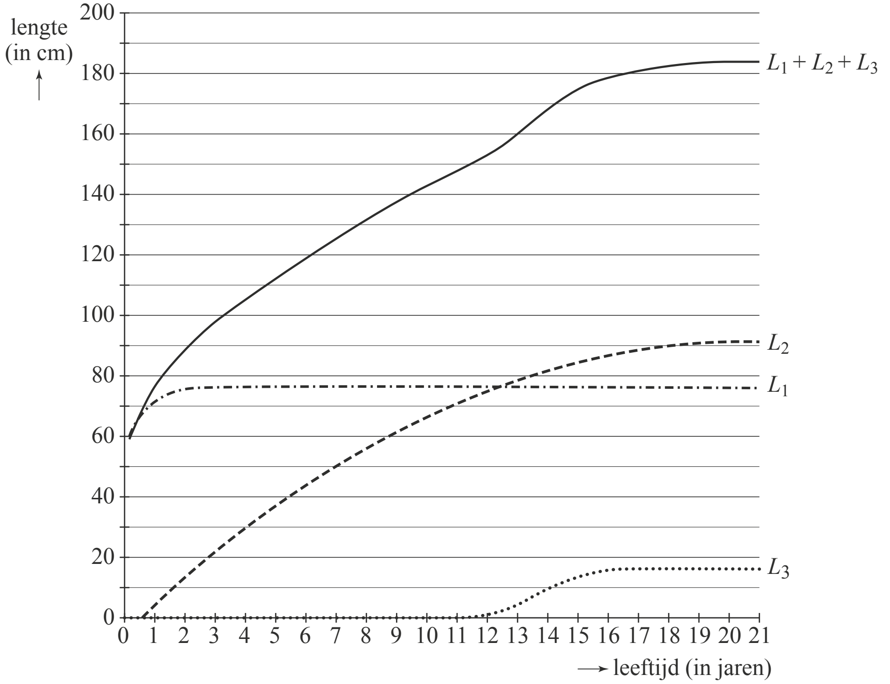
Volgens dit laatste model blijft het aantal dagen per jaar dat een Nederlander gemiddeld op vakantie gaat, de rest van deze eeuw stijgen.

4p **5** Bereken vanaf welk jaar een Nederlander gemiddeld minstens 25 dagen op vakantie gaat per jaar.

Lengtegroei bij jongens

In deze opgave bekijken we de (gemiddelde) lengte van Nederlandse jongens tot 21 jaar. Met 'lengte' wordt in de hele opgave de gemiddelde lengte bedoeld.
We gebruiken in deze opgave een veelgebruikt model uit de kindergeneeskunde, het zogenaamde KKP-model. In dit model bestaat de lengte uit drie componenten L_1, L_2 en L_3. Bij elkaar opgeteld geven deze drie componenten de lengte van Nederlandse jongens. In figuur 1 staan de drie componenten L_1, L_2 en L_3 en is ook de som van de drie getekend.

figuur 1



In het eerste half jaar is de bijdrage van de componenten L_2 en L_3 voor de lengte verwaarloosbaar en is L_1 alleen een goede benadering voor de lengte. De formule voor L_1 is:

$L_1 = 76{,}4 - 19{,}4 \cdot 0{,}9704^w$ met L_1 in cm en w de leeftijd in **weken**

De formule die hoort bij L_1 heeft een grenswaarde.

4p **6** Bereken na hoeveel weken de waarde van L_1 10 cm van deze grenswaarde verwijderd is. Geef je antwoord in gehele weken.

3p **7** Bereken met behulp van de afgeleide van L_1 de groeisnelheid in cm/week van een jongen een half jaar na zijn geboorte, dus $w = 26$. Geef je antwoord in twee decimalen.

Na het eerste halfjaar is de bijdrage van de component L_2 niet meer te verwaarlozen. De formule voor L_2 is:

$L_2 = -0{,}235t^2 + 9{,}5t - 4{,}7$ met L_2 in cm en t de leeftijd in **jaren**
Deze formule speelt verderop in deze opgave nog een rol.

De component L_3 is de extra lengte als gevolg van de groeispurt die jongens in de pubertijd ondergaan. De formule voor L_3 is:

$L_3 = \dfrac{16{,}1}{1 + e^{16{,}4 - 1{,}2t}}$ met L_3 in cm en t de leeftijd in **jaren**

Voor de afgeleide van L_3 geldt:

$$L_3' = \frac{19{,}32 \cdot e^{16{,}4-1{,}2t}}{(1+e^{16{,}4-1{,}2t})^2}$$

3p **8** Toon aan dat de bovenstaande formule van de afgeleide juist is.

Met behulp van de afgeleide van L_3 kun je op elk moment in de pubertijd berekenen hoe groot de extra groeisnelheid als gevolg van die groeispurt is.

3p **9** Bereken met behulp van die afgeleide hoe groot de extra groeisnelheid in cm/jaar maximaal is. Geef je antwoord in één decimaal.

De som van L_1, L_2 en L_3 levert de lengte L van een jongen. L kan met de volgende formule beschreven worden:

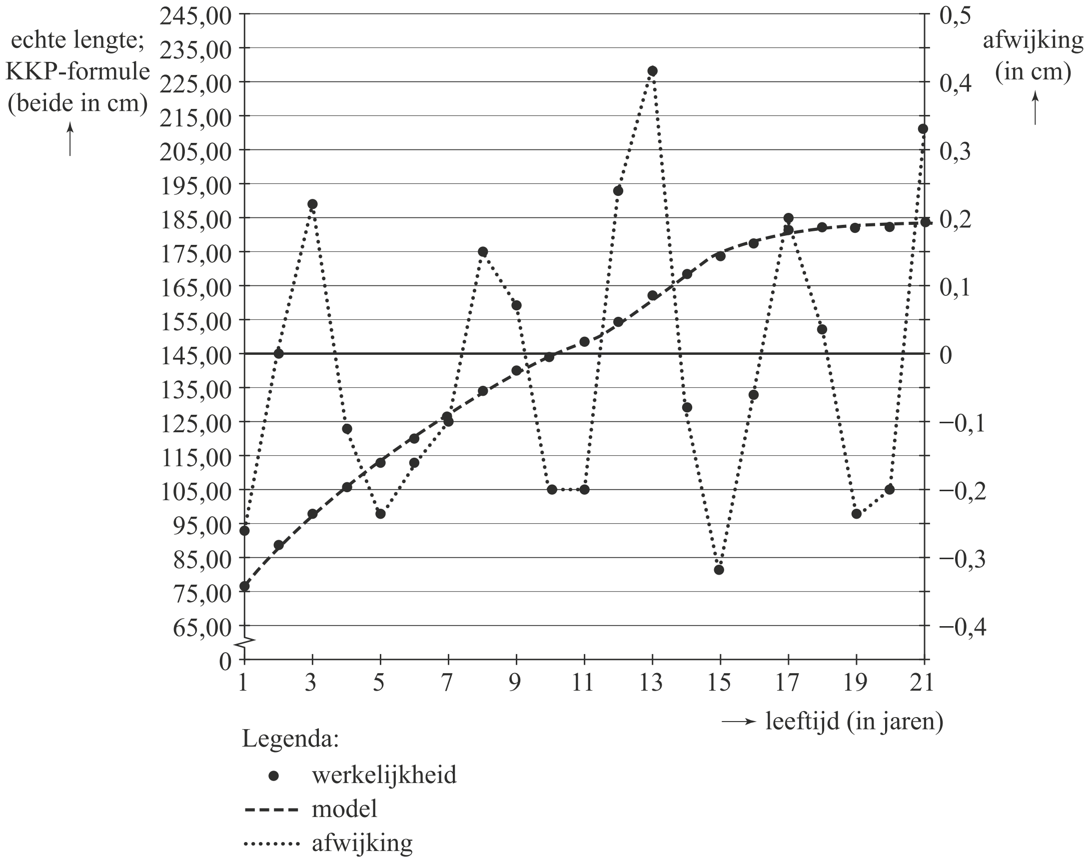
$$L = -19{,}4 \cdot 0{,}2096^t - 0{,}235t^2 + 9{,}5t + 71{,}7 + \frac{16{,}1}{1+e^{16{,}4-1{,}2t}}$$

Hierbij is L in cm en t de leeftijd in **jaren**.

4p **10** Laat zien hoe deze formule met behulp van de drie genoemde componenten kan worden opgesteld.

In figuur 2 zijn voor de leeftijden van 1 jaar tot en met 21 jaar zowel de modellengte volgens de KKP-formule (de vloeiende kromme) als de echte groeigegevens, gebaseerd op de gemiddelde (werkelijke) lengte van jongens, (de stippen) weergegeven. Zoals je kunt zien, past het KKP-model behoorlijk goed bij de werkelijkheid; de stippen passen nagenoeg perfect op de kromme.
Omdat het verschil tussen de echte groeigegevens en die van het model zo klein is, is die afwijking tussen de echte groeigegevens en de lengte volgens het model nog eens weergegeven als de gestippelde, onregelmatige grafiek. Hierbij moet de rechter verticale as gebruikt worden. Zo is uit figuur 2 bijvoorbeeld af te lezen dat de werkelijke lengte op 8-jarige leeftijd 0,15 cm afwijkt van de lengte volgens het model.

figuur 2



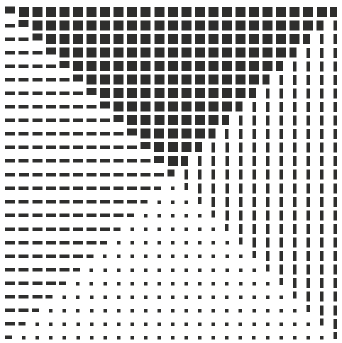
In figuur 2 is af te lezen bij welke leeftijd de absolute afwijking van de berekende gemiddelde lengte met de KKP-formule ten opzichte van de echte groeigegevens het grootst is.

5p **11** Bepaal met behulp van figuur 2 bij welke leeftijd die afwijking **relatief** het grootst is. Licht je antwoord toe.

Wetmatige beweging

Ruim 50 jaar geleden maakte de kunstenaar Peter Struycken het werk 'Wetmatige beweging'. Dit kunstwerk is opgebouwd uit 625 zwarte vormen: vierkanten en andere rechthoeken, die met een bepaalde regelmaat verdeeld zijn over een wit vlak.
Zie figuur 1.

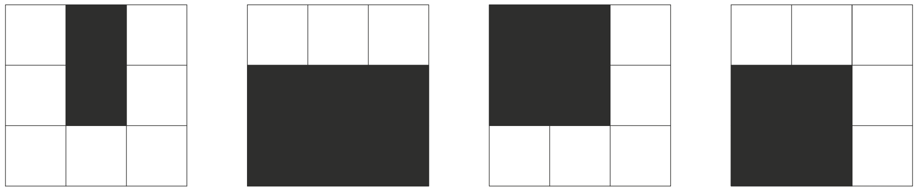
figuur 1



Elk van de 625 zwarte vormen is gemaakt op basis van een 3×3-rooster van 9 vierkanten.
Hierbij gelden de volgende voorwaarden:
- het middelste vierkant in zo'n 3×3-rooster is altijd zwart;
- een vorm bestaat uit 1, 2, 3, 4, 6 of 9 zwarte vierkanten;
- een vorm is een rechthoek (en kan dus ook een vierkant zijn).

Zie figuur 2 voor vier voorbeelden.

figuur 2



De twee vierkante vormen in figuur 2 worden als verschillende vormen opgevat, omdat ze op verschillende plaatsen in het 3×3-rooster staan.

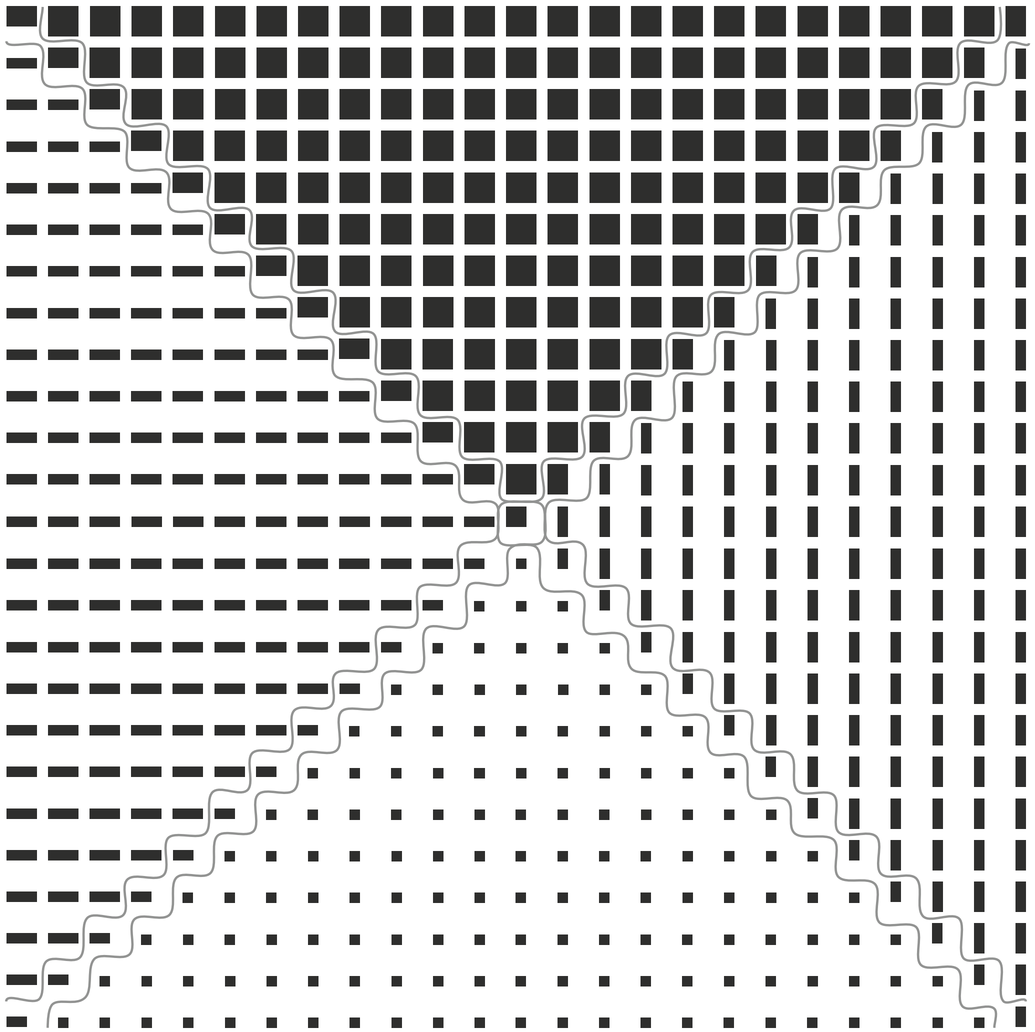
5p **12** Bereken hoeveel verschillende vormen de kunstenaar op deze manier kan maken.

In deze opgave gaan we ervan uit dat de hokjes in het 3×3-rooster allemaal 1 cm bij 1 cm zijn.

Om de totale oppervlakte te berekenen van de 625 gebruikte zwarte vormen, verdelen we het werk in 9 delen. Zie de uitwerkbijlage. In elk deel komt slechts één type vorm voor.
- Het middelste deel bestaat uit één vorm met oppervlakte 4 cm^2.
- Er zijn 4 delen die elk uit 12 dezelfde vormen bestaan.
- Er zijn 4 driehoekige delen met elk evenveel vormen.

4p **13** Bereken de totale oppervlakte in cm^2 van de 625 gebruikte zwarte vormen door uitsluitend gebruik te maken van bovenstaande gegevens en de figuur op de uitwerkbijlage.

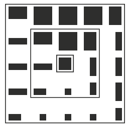
uitwerkbijlage bij vraag 13



In het midden van het kunstwerk staat dus één vorm met oppervlakte 4 cm^2. Dat is tevens de enige vorm met oppervlakte 4 cm^2 die in het kunstwerk voorkomt. Je kunt het kunstwerk opgebouwd zien vanuit het midden door vanuit dat midden naar de rand van het kunstwerk te 'lopen'. Je komt dan steeds een volgende zogeheten **schil** tegen, een rechthoekige rand van vormen. Zie ook figuur 3. Vanuit het midden is het werk opgebouwd uit 12 schillen.

In het vervolg van deze opgave bekijken we delen van dit kunstwerk, waarbij het aantal schillen variabel is. Het aantal schillen noemen we *n*.
Voor het originele kunstwerk geldt dus $n = 12$.

figuur 3



Met bijvoorbeeld $n = 2$ krijgen we het deel van het kunstwerk zoals in figuur 3. In figuur 3 zie je ook de 2 verschillende schillen plus de middenvorm met oppervlakte 4 cm^2.

In figuur 3 zijn in totaal 24 vormen rondom de vorm met oppervlakte 4 cm^2 in het midden gerangschikt. Deze 24 vormen zijn als volgt onderverdeeld:

- vier keer, vier keer, vier keer en vier keer;
- twee keer, twee keer, twee keer en twee keer.

Stel je voor dat je deze 24 vormen weghaalt van hun huidige posities en ze daarna willekeurig over de zo vrijgekomen posities gaat herverdelen zonder de vormen te draaien. De middenvorm met oppervlakte 4 cm^2 blijft daarbij dus op zijn plaats.

4p **14** Bereken hoeveel verschillende figuren je zo kunt krijgen.

De totale oppervlakte in cm^2 van de gebruikte vormen bij *n* schillen noemen we $O(n)$.
Voor $O(n)$ is een formule opgesteld:

(1) $O(n) = 1 \cdot 4 + n \cdot (2 + 2 + 6 + 6) + \frac{1}{2} n \cdot (1 + 2n - 1) \cdot (1 + 3 + 3 + 9)$

Deze formule is te herschrijven als:

(2) $O(n) = (4n + 2)^2$

3p **15** Laat zien dat beide formules (1) en (2) te herleiden zijn tot dezelfde formule.

Formule (2) is een directe formule. We kunnen deze formule ook gebruiken om een recursieve formule op te stellen voor $O(n)$.
Zo'n formule heeft de vorm:
$O(n + 1) = O(n) + an + b$ met $O(0) = 4$

4p **16** Bereken de waarden van *a* en *b*.

De bankenformule

Binnen de economie spelen rentepercentages en de bijbehorende verdubbelingstijden een grote rol. De verdubbelingstijd is de tijd die nodig is om een bedrag te verdubbelen.

In de praktijk wordt er binnen de economie vaak gebruikgemaakt van vuistregels om bij een gegeven rentepercentage de verdubbelingstijd te schatten.

Twee voorbeelden van zo'n vuistregel zijn de zogeheten **72-regel** en de zogeheten **bankenformule**:

- volgens de 72-regel geldt: $T = \frac{72}{p}$
- volgens de bankenformule geldt: $T = \frac{70}{p}$

In beide vuistregels is *p* het rentepercentage per jaar en is *T* de verdubbelingstijd in jaren.

Een bank biedt een spaarrekening met een rente van 1,00% per jaar aan. Met behulp van de bankenformule kan geschat worden welke verdubbelingstijd hierbij geldt.
Om met de 72-regel tot dezelfde verdubbelingstijd te komen, zou er een iets hoger rentepercentage moeten gelden.

3p **17** Bereken dit percentage. Geef je antwoord in twee decimalen.

De schatting van de verdubbelingstijd volgens de 72-regel valt altijd hoger uit dan de schatting volgens de bankenformule. Hoe hoger het rentepercentage echter is, hoe kleiner het verschil in verdubbelingstijd wordt tussen beide vuistregels.

3p **18** Bereken vanaf welk rentepercentage de schattingen ten hoogste een maand van elkaar verschillen.

Het werkelijke verband tussen *p* en *T* is $(1 + 0{,}01p)^T = 2$.

Van de twee genoemde vuistregels wijkt de schatting volgens de bankenformule bij lage rentepercentages het minst af van de werkelijke verdubbelingstijd.

Bij een rentepercentage van 1,10% per jaar is het verschil tussen de schatting van de verdubbelingstijd volgens de bankenformule en de werkelijke verdubbelingstijd slechts enkele maanden.

4p **19** Bereken dit verschil. Geef je antwoord in gehele maanden.

De schatting volgens de 72-regel en de schatting volgens de bankenformule worden beide gegeven door een formule van de vorm $p \cdot T = c$ met $c = 72$ bij de 72-regel en $c = 70$ bij de bankenformule.
Deze waarden voor *c* zijn onder andere zo gekozen om het rekenwerk te vergemakkelijken.
Door in de formule $p \cdot T = c$ met een andere waarde van *c* te rekenen, kan er een nauwkeurigere schatting van de verdubbelingstijd gegeven worden.

Hiervoor bekijken we nogmaals het werkelijke verband tussen *p* en *T*. Dit verband kan ook geschreven worden als:

$\ln\left((1+0{,}01p)^T\right) = \ln(2)$

Bij economen is bovendien bekend dat – voor de gangbare waarden van p die in de economie gelden – de volgende benadering gebruikt mag worden:

$\ln(1 + 0{,}01p) \approx 0{,}01p$

Met behulp van het verband $\ln\left((1 + 0{,}01p)^T\right) = \ln(2)$ en de aanname $\ln(1 + 0{,}01p) = 0{,}01p$ kan nu een nauwkeurigere waarde van c berekend worden.

4p **20** Onderzoek met behulp van $\ln\left((1 + 0{,}01p)^T\right) = \ln(2)$ en $\ln(1 + 0{,}01p) = 0{,}01p$ of deze nauwkeurigere waarde hoger of lager is dan de gekozen waarde $c = 70$ in de bankenformule.

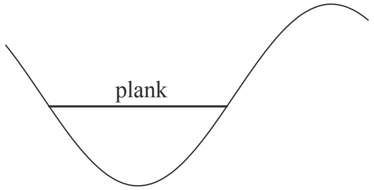
Kantwerk

Aan de rand van het dorp Olst in Overijssel is in 2008 het kunstwerk 'Kantwerk' geplaatst van de Belgische kunstenaar Marc de Roover.

Het kunstwerk stelt de golvende rivier de IJssel voor. De voorkant van het kunstwerk kan door een sinusoïde benaderd worden.

Op de website van de betreffende gemeente is te lezen dat er voor dit kunstwerk 3200 latten zijn gebruikt en dat het een lengte heeft van 100 meter. Telwerk leverde op dat iedere hele periode is opgebouwd uit 60 latten.
De uiteindes van de laagste en de hoogste latten liggen respectievelijk 17 cm en 70 cm boven het gras.

Annemarie en Floortje willen een paar mooie foto's voor hun profielwerkstuk maken. Hiervoor willen ze een soort bankje creëren door een plank horizontaal in de golf neer te leggen. Zie de schets hiernaast.



Annemarie neemt hiervoor een plank met een lengte van één meter mee. Floortje neemt een plank mee met een andere lengte. De zithoogte van het bankje van Floortje komt uit op 50 cm boven het gras.

9p **21** Onderzoek of Annemarie hoger of lager dan Floortje zit.

Hints bij examen 2019-II

1 Bereken eerst het aantal mensen dat ten minste één keer op vakantie is geweest en met behulp daarvan de omvang van de CVO-populatie.

2 Lees de coördinaten van twee punten van de trendlijn af en bereken hiermee de gemiddelde toename van het aantal buitenlandse vakanties per jaar. Gebruik de gemiddelde toename om terug te rekenen van 1990 naar 1985.

3 Omdat het totaal aantal vakanties volgens figuur 2 in 2002 en 2016 vrijwel gelijk is, kun je zonder aantallen af te lezen al een conclusie trekken.
Het is ook mogelijk om alle aantallen af te lezen en de percentages te berekenen.

4 Het aantal binnenlandse vakanties is gelijk aan het totaal aantal minus het aantal buitenlandse vakanties. Combineer beide formules tot één formule. Bereken de t-waarde van het maximum met de rekenmachine of met de afgeleide.

5 Het aantal dagen dat een Nederlander per jaar gemiddeld op vakantie gaat is $A \cdot L$.

6 Bereken de grenswaarde van L_1. De vergelijking die moet worden opgelost is L_1 = grenswaarde – 10. Oplossen kan algebraïsch, mag ook met rekenmachine.

7 Differentieer met behulp van de differentieerregel: $f(x) = g^x \Rightarrow f'(x) = g^x \cdot \ln(g)$

8 Gebruik de quotiëntregel.

9 Zoek het maximum van L_3' met behulp van de rekenmachine.

10 In de formule L_1 moet de variabele w (weken) worden omgezet naar t (jaren).

11 Relatieve afwijking = afwijking / lengte × 100%. Door slim redeneren is het niet nodig om voor alle jaren de relatieve afwijking te berekenen. Het mag wel, maar dat is een tijdrovend proces. Merk op dat het voor de vraag niet uitmaakt of een afwijking positief of negatief is.

12 Schets de verschillende mogelijkheden. Ga systematisch te werk. Kijk goed naar de drie voorwaarden waar een vorm aan moet voldoen.

13 Tel voor elk van de 9 delen het aantal vormen en vermenigvuldig dit aantal met de oppervlakte van die vorm. Controleer of het totaal aantal vormen 625 is.

14 Bij elke vorm moet je het aantal combinaties berekenen om het aantal van die vorm over de vrije posities te verdelen. Dus voor de eerste vorm, waar er vier van zijn, zijn er 24 nCr 4 manieren om die te verdelen over de 24 vrije posities.

15 Beide formules vereenvoudigen en zonder haakjes schrijven.

16 De vorm van de recursieve formule is al gegeven dus het is hier mogelijk om met voorbeeldwaarden te rekenen.
Andere aanpak: Uit de gegeven formule voor $O(n)$ kun je de formule voor $O(n + 1)$ afleiden. Het verschil tussen beide formules is het deel $an + b$.

17 Vul $p = 1{,}00$ in de bankenformule in en vul vervolgens de berekende verdubbelingstijd in de 72-regel in.

18 Het verschil tussen beide vuistregels mag ten hoogste 1 maand = $\frac{1}{12}$ jaar zijn.

19 Vul $p = 1{,}10$ in in de formule die het werkelijke verband tussen p en T geeft. Los deze vergelijking algebraïsch of met de rekenmachine op.

20 Gebruik van de formulelijst de formule ${}^g\log(a^p) = p \cdot {}^g\log(a)$ en verder de gegeven benadering $\ln(1 + 0{,}01p) \approx 0{,}01p$.

21 Een formule die de hoogte van het kunstwerk ten opzichte van het gras beschrijft is van de vorm $h(x) = a + b\sin(c(x - d))$. Ga na dat het geen bezwaar is om $d = 0$ te kiezen. Gegeven is de hoogte waarop de plank van Floortje het kunstwerk raakt, dus dan kun je met *intersect* uitrekenen hoe lang Floortjes plank is.

©ThiemeMeulenhoff

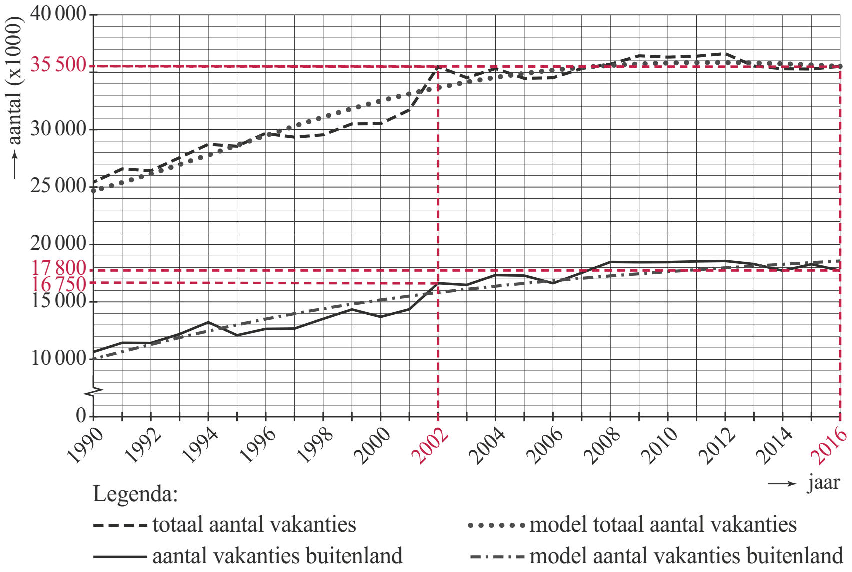
Uitwerkingen bij examen 2019-II

Continu Vakantie Onderzoek

3p **1** Als een persoon gemiddeld 2,78 keer op vakantie gaat, zijn er voor 35,5 miljoen vakanties $\frac{35{,}5}{2{,}78} = 12{,}769...$ miljoen mensen nodig. [1p] Dit aantal is 80,7% van de CVO-populatie, dus de CVO-populatie bestaat uit $\frac{12{,}769...}{80{,}7} \cdot 100$ [1p] $= 15{,}823772...$ miljoen mensen.
Afgerond op duizendtallen: 15 824 000 mensen. [1p]

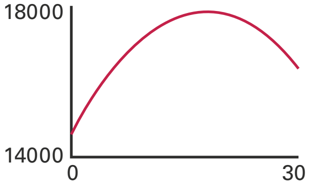
4p **2** Het aantal buitenlandse vakanties stijgt van ongeveer 11 100 000 in 1990 naar ongeveer 14 400 000 in 2001. [1p]
Dat is een gemiddelde toename van $\frac{14\,400\,000 - 11\,100\,000}{2001 - 1990} = 300\,000$ per jaar. [1p]
Terugrekenen vanuit 11 100 000 in 1990 geeft voor 1985:
$11\,100\,000 - 5 \cdot 300\,000 = 9\,600\,000$ buitenlandse vakanties. [2p]

3p **3** Aflezen in figuur 2.



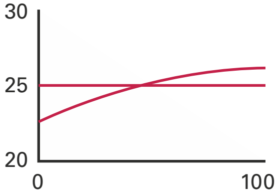
Het totaal aantal vakanties is in 2002 en 2016 vrijwel gelijk [1p], maar het aantal buitenlandse vakanties is van 2002 tot 2016 wel toegenomen. [1p]
Hieruit volgt dat het percentage buitenlandse vakanties als percentage van het totaal aantal vakanties in de periode 2002-2016 is toegenomen. [1p]
andere manier
Het totaal aantal vakanties is zowel in 2002 als in 2016 ongeveer 35 500 000. [1p]
Het aantal buitenlandse vakanties in 2002 was ongeveer 16 750 000.
Dat was $\frac{16\,750\,000}{35\,500\,000} \cdot 100 = 47{,}1...\%$ van het totaal.
Het aantal buitenlandse vakanties in 2016 was ongeveer 17 800 000.
Dat was $\frac{17\,800\,000}{35\,500\,000} \cdot 100 = 50{,}1...\%$ van het totaal. [1p]
Het percentage buitenlandse vakanties als percentage van het totaal aantal vakanties is in de periode 2002-2016 dus toegenomen. [1p]

4p **4** Het aantal binnenlandse vakanties is gelijk aan het totaal aantal minus het aantal buitenlandse vakanties. [1p]
In formulevorm (hierin staat *AB* voor het aantal binnenlandse vakanties):
$AB = T - B = -20{,}3t^2 + 951t + 24\,800 - (-10{,}1t^2 + 587t + 10\,200) =$ [1p]
$-20{,}3t^2 + 951t + 24\,800 + 10{,}1t^2 - 587t - 10\,200 \Rightarrow$
$AB = -10{,}2t^2 + 364t + 14\,600$
Voer in de rekenmachine in: $y_1 = -10{,}2x^2 + 364x + 14\,600$



De optie *maximum* geeft $x = 17{,}843...$. [1p] Dat betekent dat in het 18e jaar na 1990 een maximum plaatsvindt. Dat is in 2008. [1p]
andere manier voor het laatste deel met behulp van differentiëren
$AB = -10{,}2t^2 + 364t + 14\,600 \Rightarrow AB' = -20{,}4t + 364$ [2p]
Bij het maximum is de afgeleide nul, dus:
$AB' = -20{,}4t + 364 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-364}{-20{,}4} = 17{,}843...$ [1p]
In het 18e jaar na 1990 vindt een maximum plaats. Dat is in 2008. [1p]

4p **5** Noem het aantal dagen dat een Nederlander per jaar gemiddeld op vakantie gaat *D*.
Dan geldt: $D = A \cdot L$ [1p] $= (0{,}0136t + 2{,}43) \cdot (-0{,}024t + 9{,}3)$ [1p]
Voer in de rekenmachine in: $y_1 = (0{,}0136x + 2{,}43) \cdot (-0{,}024x + 9{,}3)$ en $y_2 = 25$



De optie *intersect/snijpunt* geeft $x = 44{,}8...$ [1p] dus in het 45e jaar na 1990 gaat een Nederlander voor het eerst gemiddeld minstens 25 dagen op vakantie.
Dat is in 2035. [1p]

Lengtegroei bij jongens

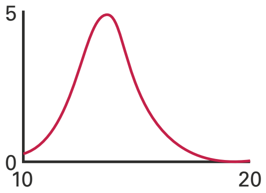
4p **6** Als w toeneemt, daalt $0{,}9704^w$ naar nul, dus dan daalt ook $19{,}4 \cdot 0{,}9704^w$ naar nul.
Maar dan stijgt $76{,}4 - 19{,}4 \cdot 0{,}9704^w$ naar 76,4. De grenswaarde van L_1 is 76,4 cm. [1p]
Nu moet opgelost worden: $L_1 = 66{,}4$
$76{,}4 - 19{,}4 \cdot 0{,}9704^w = 66{,}4$ [1p] $\Leftrightarrow 19{,}4 \cdot 0{,}9704^w = 10 \Leftrightarrow 0{,}9704^w = \frac{10}{19{,}4} \Leftrightarrow$
$w = {}^{0{,}9704}\log\left(\frac{10}{19{,}4}\right) = 22{,}05...$ [1p]
Na 22 weken is de waarde van L_1 10 cm verwijderd van de grenswaarde. [1p]
andere manier
De vergelijking $76{,}4 - 19{,}4 \cdot 0{,}9704^w = 66{,}4$ mag ook met de rekenmachine worden opgelost. [2p]
Voer in de rekenmachine in: $y_1 = 76{,}4 - 19{,}4 \cdot 0{,}9704^x$ en $y_2 = 66{,}4$
De optie *intersect/snijpunt* geeft $x = 22{,}05...$ [1p] dus na 22 weken is de waarde van L_1 10 cm verwijderd van de grenswaarde. [1p]

3p **7** $L_1 = 76{,}4 - 19{,}4 \cdot 0{,}9704^w \Rightarrow L_1' = -19{,}4 \cdot 0{,}9704^w \cdot \ln(0{,}9704)$ [1p]
Als $w = 26$ geldt: $L_1'(26) = -19{,}4 \cdot 0{,}9704^{26} \cdot \ln(0{,}9704) = 0{,}2668...$ [1p]
Voor een jongen van een half jaar oud is de groeisnelheid ongeveer 0,27 cm/week. [1p]

3p **8** Differentieer $L_3 = \dfrac{16{,}1}{1 + e^{16{,}4-1{,}2t}}$ met de quotiëntregel:

$$L_3' = \frac{(1 + e^{16{,}4-1{,}2t}) \cdot 0 - 16{,}1 \cdot e^{16{,}4-1{,}2t} \cdot -1{,}2}{(1 + e^{16{,}4-1{,}2t})^2} \text{ [2p]} = \frac{1{,}2 \cdot 16{,}1 \cdot e^{16{,}4-1{,}2t}}{(1 + e^{16{,}4-1{,}2t})^2} = \frac{19{,}32 \cdot e^{16{,}4-1{,}2t}}{(1 + e^{16{,}4-1{,}2t})^2} \text{ [1p]}$$

3p **9** Het maximum van L_3' moet worden berekend.
Voer in de rekenmachine in: $y_1 = \dfrac{19{,}32 \cdot e^{16{,}4-1{,}2x}}{(1 + e^{16{,}4-1{,}2x})^2}$ [1p]



De optie *maximum* geeft $x = 13{,}66...$ en $y = 4{,}83$ [1p], dus de extra groeisnelheid is maximaal 4,8 cm/jaar [1p] (op de leeftijd van 13,7 jaar).

4p **10** In de formule L_1 staat de variabele w (weken), maar die moeten we omzetten naar jaren. Omdat $\frac{w}{52} = t$ kunnen we w vervangen door $52t$, dus:
$L_1 = 76{,}4 - 19{,}4 \cdot 0{,}9704^w = 76{,}4 - 19{,}4 \cdot 0{,}9704^{52t}$ [1p] $= 76{,}4 - 19{,}4 \cdot (0{,}9704^{52})^t =$
$76{,}4 - 19{,}4 \cdot 0{,}2096^t$. [1p]
Hieruit volgt voor de totale lengte L:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 \approx 76{,}4 - 19{,}4 \cdot 0{,}2096^t - 0{,}235\,t^2 + 9{,}5t - 4{,}7 + \frac{16{,}1}{1 + e^{16{,}4-1{,}2t}} =$$
$$-19{,}4 \cdot 0{,}2096^t - 0{,}235\,t^2 + 9{,}5t + 71{,}7 + \frac{16{,}1}{1 + e^{16{,}4-1{,}2t}} \text{ [2p]}$$

5p **11** Aflezen in de figuur.
Op de leeftijd van 1 jaar is de afwijking –0,26 cm en de lengte is 76 cm. [1p]
De relatieve afwijking is dan $\frac{-0{,}26}{76} \cdot 100 \approx -0{,}341\%$. [1p]

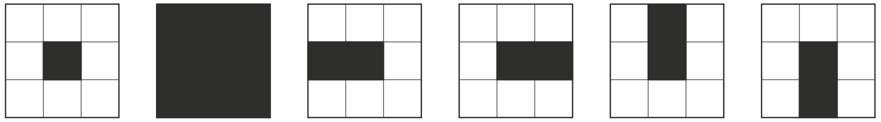
Als de leeftijd stijgt, kan de relatieve afwijking alleen groter zijn dan die op 1-jarige leeftijd als de afwijking groter is dan 0,26 of kleiner dan –0,26 (want de lengte neemt ook voortdurend toe). De eerste leeftijd waarop dat het geval is, is 13 jaar.
Op de leeftijd van 13 jaar is de afwijking 0,42 cm en de lengte is 162 cm. [1p]
De relatieve afwijking is dan $\frac{0{,}42}{126} \cdot 100 \approx 0{,}333\%$. [1p] Deze is niet groter dan die bij 1 jaar. [1p]

Als de leeftijd verder stijgt, kan de relatieve afwijking alleen groter zijn dan die op 1-jarige leeftijd als de afwijking groter is dan 0,42, want alleen dan kan de relatieve afwijking groter zijn dan die bij 13 jaar en dus mogelijk ook groter dan die bij 1 jaar.
Bij de leeftijden boven 13 jaar is er echter geen enkele afwijking groter dan 0,42.
De grootste relatieve afwijking is dus bij de leeftijd van 1 jaar.

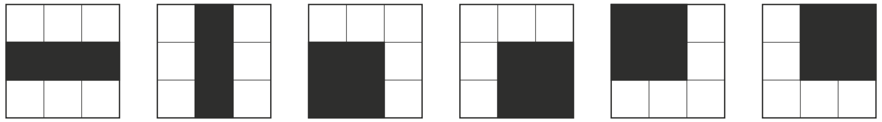
©ThiemeMeulenhoff

Wetmatige beweging

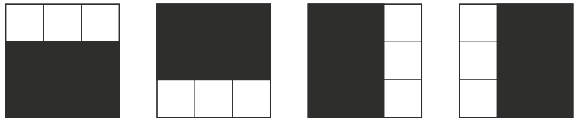
5p **12** Zowel met één als met negen zwarte vierkanten kan 1 vorm gemaakt. Met twee zwarte vierkanten kunnen 4 vormen gemaakt worden: [2p]



Met drie zwarte vierkanten kunnen 2 vormen gemaakt worden en met vier zwarte vierkanten kunnen 4 vormen gemaakt worden: [1p]



Met zes zwarte vierkanten kunnen 4 vormen gemaakt worden: [1p]



Er zijn 1 + 1 + 4 + 2 + 4 + 4 = 16 verschillende vormen die aan de voorwaarden voldoen. [1p]

4p **13** De bovenste driehoek bevat 144 vormen met oppervlakte 9.
Zowel de driehoek links als de driehoek rechts bevat 144 vormen met oppervlakte 3.
De onderste driehoek bevat 144 vormen met oppervlakte 1.
Zowel de diagonaal linksboven als de diagonaal rechtsboven bevat 12 vormen met oppervlakte 6.
De diagonalen linksonder en rechtsonder bevatten beide 12 vormen met oppervlakte 2.
En helemaal in het midden is een vorm met oppervlakte 4.
De totale oppervlakte van alle vormen samen is:
$(144 \times 9) + (2 \times 144 \times 3) + (144 \times 1)$ [2p] $+ (2 \times 12 \times 6) + (2 \times 12 \times 2)$ [1p] $+ 4 = 2500\ \text{cm}^2$ [1p]

4p **14** De vier vierkantjes met oppervlakte 1 kunnen op $\binom{24}{4}$ manieren worden verdeeld over de 24 posities. [1p] De vier horizontale rechthoeken met oppervlakte 3 kunnen vervolgens op $\binom{20}{4}$ manieren worden verdeeld over de resterende 20 posities.
De volgende zes vormen kunnen achtereenvolgens worden verdeeld op $\binom{16}{4}$, $\binom{12}{4}$, $\binom{8}{2}$, $\binom{6}{2}$, $\binom{4}{2}$ en $\binom{2}{2}$ manieren. [1p]
Het totaal aantal verschillende figuren dat je op deze manier kunt krijgen is:
$\binom{24}{4} \cdot \binom{20}{4} \cdot \binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}$ [1p] $= 1{,}1688... \cdot 10^{17}$ [1p]
Dit antwoord mag worden afgerond tot op $1 \cdot 10^{17}$.

©ThiemeMeulenhoff

3p **15** Formule (1) herschrijven:

$O(n) = 1 \cdot 4 + n \cdot (2+2+6+6) + \frac{1}{2} n \cdot (1 + 2n - 1) \cdot (1+3+3+9) =$

$4 + n \cdot (16) + \frac{1}{2} n \cdot (2n) \cdot (16) = 4 + 16n + 16n^2$ [2p]

Formule (2) herschrijven:

$O(n) = (4n+2)^2 = (4n+2)(4n+2) = 16n^2 + 8n + 8n + 4 = 16n^2 + 16n + 4$ [1p]

De formules (1) en (2) zijn dus te herleiden tot dezelfde formule.

4p **16** Uit de gegeven recursieve formule volgt: $O(1) = O(0) + a \cdot 0 + b \Leftrightarrow O(1) = 4 + b$ [1p]
Uit formule (2) volgt: $O(1) = (4 \cdot 1 + 2)^2 = 36$ dus $b = 36 - 4 = 32$ [1p]
Uit de recursieve formule volgt: $O(2) = O(1) + a \cdot 1 + b = 36 + a + 32 = a + 68$ [1p]
Uit formule (2) volgt: $O(2) = (4 \cdot 2 + 2)^2 = 100$ dus $a = 100 - 68 = 32$ [1p]
andere manier
Uit formule (2) volgt:
$O(n+1) = (4(n+1)+2)^2 = (4n+4+2)^2 = (4n+6)^2 = (4n+6)(4n+6) =$
$16n^2 + 24n + 24n + 36 \Rightarrow O(n+1) = 16n^2 + 48n + 36$ [1p]
Hieruit volgt: $O(n+1) - O(n) = (16n^2 + 48n + 36) - (16n^2 + 16n + 4)$ [1p] $\Rightarrow$
$O(n+1) = O(n) + 16n^2 + 48n + 36 - 16n^2 - 16n - 4 = 32n + 32$ [1p]
Hieruit volgt: $a = 32$ en $b = 32$ [1p]

De bankenformule

3p **17** $p = 1{,}00$ invullen in de bankenformule: $T = \frac{70}{1{,}00} = 70$ jaar [1p]

Nu de verdubbelingstijd van 70 jaar invullen in de 72-regel:

$70 = \frac{72}{p} \Leftrightarrow p = \frac{72}{70} = 1{,}02857...$ [1p] dus de 72-regel geeft dezelfde verdubbelingstijd

bij een rentepercentage van ongeveer 1,03%. [1p]

3p **18** Beide vuistregels berekenen de verdubbelingstijd in jaren. Omdat 1 maand = $\frac{1}{12}$ jaar,

moet gelden: $\frac{72}{p} - \frac{70}{p} = \frac{1}{12}$ [1p]

Een algebraïsche oplossing: $\frac{72}{p} - \frac{70}{p} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{2}{p} = \frac{1}{12} \Rightarrow p = 24$ [1p], dus vanaf een

rentepercentage van 24% verschillen de schattingen ten hoogste een maand. [1p]

De vergelijking $\frac{72}{p} - \frac{70}{p} = \frac{1}{12}$ *mag ook met behulp van de rekenmachine worden opgelost.*

4p **19** De bankenformule geeft voor $p = 1{,}10$: $T = \frac{70}{1{,}10} = 63{,}6363...$ jaar [1p]

De werkelijke verdubbelingstijd bij $p = 1{,}10$ volgt uit: $(1 + 0{,}01 \cdot 1{,}10)^T = 2 \Leftrightarrow$
$1{,}011^T = 2$ [1p] $\Leftrightarrow T = {}^{1{,}011}\log(2) = 63{,}3593...$ jaar [1p]
Het verschil is 63,6363... – 63,3593... = 0,2770... jaar en dat is 0,2770... × 12 =
3,32... ≈ 3 maanden. [1p]
De vergelijking $(1 + 0{,}01 \cdot 1{,}10)^T = 2$ *mag ook met behulp van de rekenmachine worden opgelost.*

4p **20** Uit $\ln((1 + 0{,}01p)^T) = \ln(2)$ volgt $T \cdot \ln(1 + 0{,}01p) = \ln(2)$ [1p] en met behulp van de

benadering $\ln(1 + 0{,}01p) \approx 0{,}01p$ volgt hieruit: $T \cdot 0{,}01p \approx \ln(2)$ [1p] $\Leftrightarrow$

$p \cdot T \approx \frac{\ln(2)}{0{,}01} \Leftrightarrow p \cdot T \approx 69{,}31...$ [1p]

De nauwkeurigere waarde van c is ongeveer 69,3 en dat is lager dan de $c = 70$ van de bankenformule. [1p]

©ThiemeMeulenhoff

Kantwerk

9p **21** Een formule die de hoogte h van het kunstwerk ten opzichte van het gras beschrijft is van de vorm $h(x) = a + b\sin(c(x - d))$, waarin x de afstand is ten opzichte van een nog te kiezen beginpunt. Hierin is h in centimeters en x in meters*. [1p]
Het maakt voor de vraag niet uit waar we de golf laten beginnen, dus is het geen bezwaar om $d = 0$ te kiezen.

a = evenwichtsstand = $\frac{70+17}{2} = 43{,}5$ cm [1p] en b = amplitude = $\frac{70-17}{2} = 26{,}5$ cm [1p]

Een periode bestaat uit 60 latten en het hele kunstwerk bestaat uit 3200 latten, dus dat

zijn in totaal $\frac{3200}{60} = 53\frac{1}{3}$ of 53,33... perioden.

Het kunstwerk is 100 meter lang, dus een periode is $\frac{100}{53\frac{1}{3}}$ of $\frac{100}{53{,}33...} = 1{,}875$ meter. [1p]

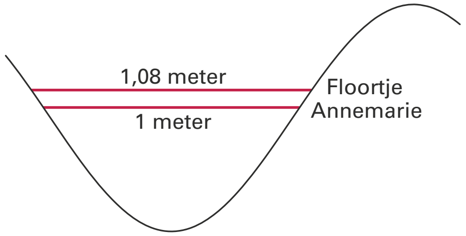
Dus $c = \frac{2\pi}{1{,}875} = \frac{16}{15}\pi$ of 3,351... . [1p]

De formule voor h wordt dan $h(x) = 43{,}5 + 26{,}5\sin(3{,}351... \cdot x)$.

De plank van Floortje ligt op hoogte 50 cm boven het gras.

Voer nu in de rekenmachine in $y_1 = 43{,}5 + 26{,}5\sin(3{,}351... \cdot x)$ en $y_2 = 50$. [1p]

Met de optie *intersect/snijpunt* kunnen we berekenen voor welke x de plank van Floortje het kunstwerk raakt (*stel de rekenmachine in op radialen*).
Dit geeft $x = 0{,}863...$ en $x = 1{,}948...$ [1p], dus de plank van Floortje is
1,948... – 0,863... ≈ 1,08 meter lang. [1p]
De plank van Annemarie is slechts 1 meter lang, dus Annemarie zit lager dan Floortje. [1p]



**Als je x ook in cm wil uitdrukken, wordt* $c = \frac{2\pi}{187{,}5} \approx 0{,}03351...$ *en de formule* $h(x) = 43{,}5 + 26{,}5\sin(0{,}03351... \cdot x)$ *maar de oplosmethode verandert hierdoor niet.*

©ThiemeMeulenhoff

Oefenen met het examen van 2021-I.
De antwoorden en uitwerkingen vind je op mijn.examenbundel.nl.

Deel 2b Examen zonder uitwerkingen

Bronvermelding
Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift op mijn.examenbundel.nl.

Examen 2021-I

Linkshandigen en ronde getallen

Onderzoek uit 2013 heeft uitgewezen dat linkshandigen eerder geneigd zijn ronde getallen te kiezen dan rechtshandigen. Deelnemers aan het onderzoek kregen elk 60 vragen voorgelegd, waarop het antwoord een geheel getal is.
De vragen waren bijvoorbeeld:
- Hoeveel knopen heb je in je klerenkast?
- Hoeveel diersoorten kun je noemen?
- Hoeveel eieren heb je vorig jaar gegeten?

Bij het onderzoek werd alleen gekeken naar de vragen waarop een antwoord werd gegeven vanaf 20 tot en met 1000. Linkshandigen bleken vaker een rond getal als antwoord te geven dan rechtshandigen.

Wat is eigenlijk een rond getal? Een rond getal is een getal dat eindigt op één of meer nullen, dus bijvoorbeeld 20 of 300. Maar is 100 een ronder getal dan bijvoorbeeld 1000? En hoe zit het dan met getallen die niet op een nul eindigen, maar wel ‘mooi’ zijn, zoals bijvoorbeeld 25?

Om de rondheid van getallen te bepalen, gebruikten de onderzoekers de **definitie van Sigurd**. Deze definitie zegt dat de **rondheid** van een getal ervan afhangt of het getal een veelvoud is van machten van 10, of van helften of kwarten van machten van 10.
De rondheid R wordt voor de getallen (n) vanaf 20 tot en met 1000 dan als volgt berekend:

$$R(n)=\frac{1000}{n}+\frac{100}{n}+\frac{10}{n}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{500}{n}+\frac{50}{n}+\frac{5}{n}\right)+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{250}{n}+\frac{25}{n}\right)$$

Elke term $\frac{\dots}{n}$ telt alleen mee als n een veelvoud van de teller is.
We spreken af dat getallen n ronder zijn, naarmate $R(n)$ hoger is.

Zo geldt bijvoorbeeld voor het getal 600:

$$R(600)=\cancel{\frac{1000}{600}}+\frac{100}{600}+\frac{10}{600}+\frac{1}{2}\cdot\left(\cancel{\frac{500}{600}}+\frac{50}{600}+\frac{5}{600}\right)+\frac{1}{4}\cdot\left(\cancel{\frac{250}{600}}+\frac{25}{600}\right)\approx 0{,}24$$

4p **1** Onderzoek met behulp van de formule welke van de twee getallen 750 en 600 het rondst is.

De rondheid van 1000 is groter dan die van 500. Het is echter niet zo dat 600 ook ronder is dan 500. Sterker nog, voor alle honderdtallen tussen 500 en 1000 geldt dat de rondheid ervan steeds kleiner wordt.
Je kunt dat beredeneren door de formule te herschrijven tot een formule die alleen voor honderdtallen tussen 500 en 1000 geldt. Dat kan worden gedaan met behulp van de substitutie $n = 100p$ (met p de gehele getallen 6 tot en met 9) en daarna de formule te herleiden tot $R = \frac{23}{16p}$.

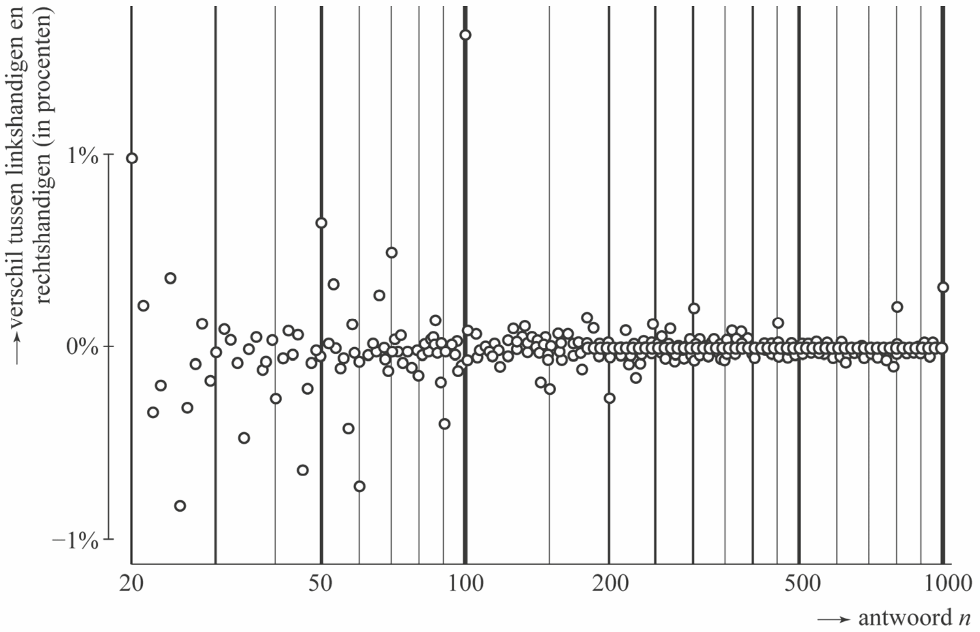
4p **2** Toon dit aan en beredeneer vervolgens aan de hand van deze formule, zonder getallen in te vullen of een schets te maken, dat de rondheid van de honderdtallen tussen 500 en 1000 steeds kleiner wordt.

Er waren 200 deelnemers aan het onderzoek, die elk 60 vragen kregen voorgelegd. 1,3% van de gegeven antwoorden was een getal boven de 1000. Na het wegstrepen van deze antwoorden, en het wegstrepen van de antwoorden beneden de 20, bleven er 3412 antwoorden over die waren gegeven door linkshandigen, en 4329 die waren gegeven door rechtshandigen.

4p **3** Bereken het percentage gegeven antwoorden beneden de 20. Geef je antwoord in één decimaal.

In onderstaande figuur staat een overzicht van de gegeven antwoorden door de links- en rechtshandigen. Van de 3412 antwoorden van de linkshandigen was 6,7% het getal 20. Van de 4329 gegeven antwoorden van de rechtshandigen was dit percentage 5,7. Het **verschil** tussen deze twee percentages is 1. In de figuur zie je daarom bij het getal 20 een stip staan op een hoogte van 1%.

figuur



De horizontale as heeft een logaritmische schaalverdeling.
In de figuur is het volgende zichtbaar gemaakt: hoe **dikker** de verticale streep bij een getal, hoe **ronder** dat getal.
Veel ronde getallen worden procentueel vaker genoemd door linkshandigen dan door rechtshandigen.

Het antwoord 100 werd 276 maal gegeven door de linkshandigen.

4p **4** Bereken hoe vaak het antwoord 100 gegeven werd door de rechtshandigen.

We geven twee uitspraken:
1 Naarmate getallen groter worden, worden ze minder vaak gekozen.
2 Grote getallen worden procentueel bijna even vaak door de linkshandigen als door de rechtshandigen als antwoord gegeven.

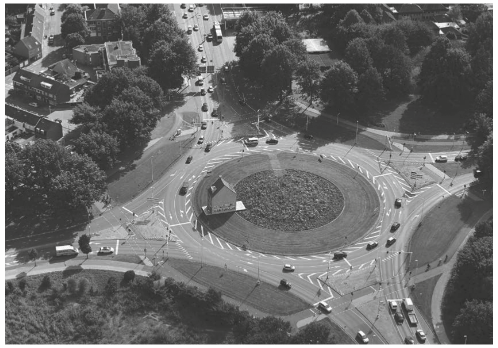
4p **5** Leg voor elk van deze uitspraken uit of deze wel of niet uit de figuur volgt.

Draaiend huis

Op de Hasseltrotonde in Tilburg staat een huis. Eigenlijk is ‘staat’ niet het goede woord, want het huis beweegt: het draait in het rond. Het gevolg is dat elke keer dat je langs de rotonde rijdt, het huis op een andere plaats kan staan. Het is een kunstproject, ontworpen door John Körmeling.
Zie foto 1 en foto 2 hieronder.

foto 1

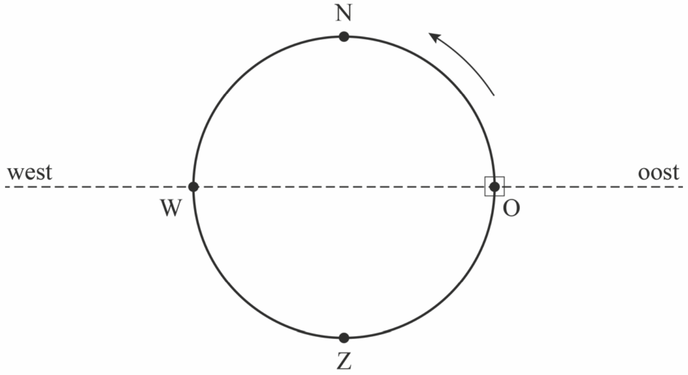
foto 2



Het huis legt in 20 uur één ronde af, zodat je, als je de rotonde elke dag op hetzelfde tijdstip passeert, het huis geen twee opeenvolgende dagen op dezelfde plaats ziet.

Op een maandag staat het huis om acht uur ‘s morgens (08.00 uur) precies aan de oostkant van de rotonde. Voor het vervolg van de opgave is dit $t = 0$. In figuur 1 is een overzicht van de situatie te zien. Het huis is in figuur 1 weergegeven als vierkantje en bevindt zich in punt O.

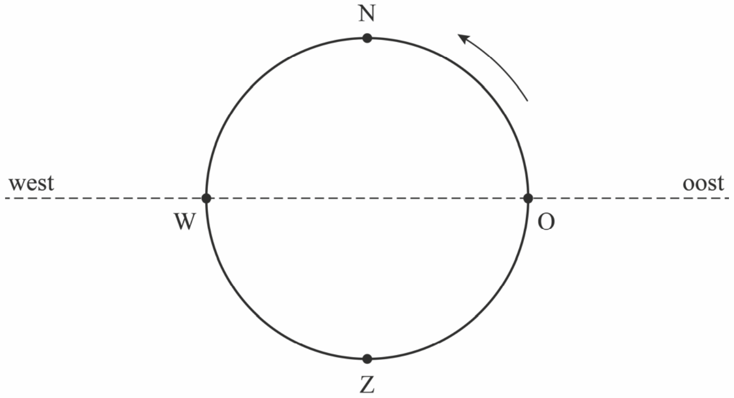
figuur 1



Het huis draait met de rijrichting van het verkeer mee.

3p **6** Geef in de figuur op de uitwerkbijlage de plaats aan waar het huis zich op diezelfde maandag om 20.30 uur bevindt. Licht je antwoord toe.

Uitwerkbijlage bij vraag 6



3p **7** Bereken hoeveel hele weken na tijdstip $t = 0$ het huis zich voor het eerst weer om 08.00 uur op maandag in punt O bevindt.

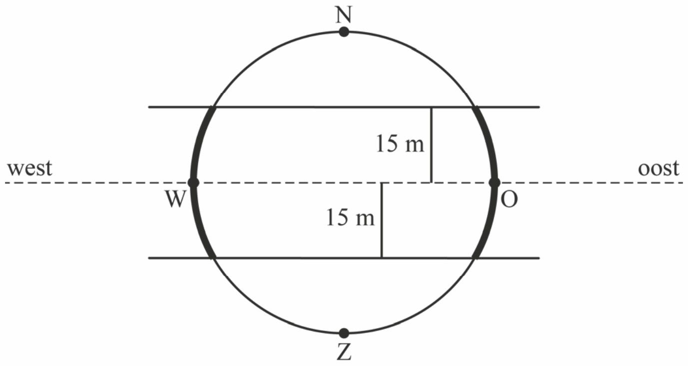
De straal van de cirkel waarover het huis beweegt, is 30 meter.
De afstand A in meters van het huis tot de west-oost-as gedurende een rondgang over de rotonde kan worden weergegeven met de formule $A = 30 \cdot \sin(\frac{\pi}{10} \cdot t)$, met t de tijd in uren, en $t = 0$ op het moment dat het huis in O is. Hierbij worden afstanden onder de west-oost-as als negatieve getallen weergegeven.

Je kunt de formule ook zó schrijven dat het beginpunt ($t = 0$) in het noorden, in punt N ligt. De formule heeft dan de volgende vorm:
$y = 30 \cdot \sin(\frac{\pi}{10} \cdot (t - d))$

3p **8** Bereken de waarde van d.

In figuur 2 zie je aan de vetgemaakte cirkeldelen waar het huis zich minder dan 15 meter van de west-oost-as bevindt.

figuur 2



4p **9** Bereken met behulp van de formule $A = 30 \cdot \sin(\frac{\pi}{10} \cdot t)$ hoeveel procent van de tijd het huis zich minder dan 15 meter van de west-oost-as bevindt. Geef je antwoord in gehele procenten.

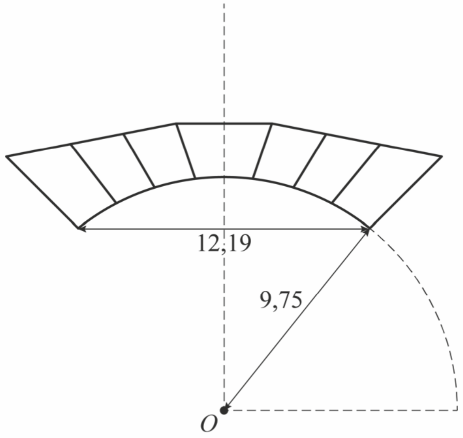
Mathematical Bridge

foto 1

foto 2

Op foto 1 zie je de Mathematical Bridge, een houten brug in Cambridge. Deze brug werd in 1748 ontworpen door William Etheridge.
Als je goed kijkt naar de brug, dan zie je dat deze bestaat uit een aantal balken die een denkbeeldige boog (gevormd door de onderkant van de brug) raken. Zie foto 2.
We maken van deze brug een wiskundig model. De onderkant van de brug is 12,19 m breed en deze onderkant beschouwen we als een deel van een cirkel met straal 9,75 m. Zie de figuur, waarin de maten gegeven zijn in meters. De standaardformule voor een cirkel met middelpunt (0, 0) en straal r is $x^2 + y^2 = r^2$.

figuur



Wanneer we de oorsprong O kiezen zoals in de figuur aangegeven, dan geldt voor de hoogte van de onderkant van de brug:

$$y = \sqrt{95,0625 - x^2}$$

Hierbij zijn x en y in meters.

3p **10** Toon aan dat de formule $y = \sqrt{95,0625 - x^2}$ inderdaad past bij dit model.

Er varen veel bootjes onder de brug door. Het is daarom belangrijk om te weten hoe hoog de onderkant van de brug op bepaalde punten is ten opzichte van de waterspiegel.

3p **11** Bereken het hoogteverschil tussen het beginpunt en het hoogste punt van de onderkant van de brug. Geef je antwoord in gehele cm.

Op foto 3 zie je een raaklijn die ongeveer gelijk loopt met het begin van het looppad van de brug. Deze raaklijn raakt de cirkel in het punt $(-1,90; 9,56)$. Zowel dit punt als het beginpunt van de raaklijn is in de foto aangegeven.

foto 3

4p **12** Bereken met behulp van de formule van de afgeleide de waarde van $y'(-1,90)$ en leg uit wat de praktische betekenis van deze waarde is.

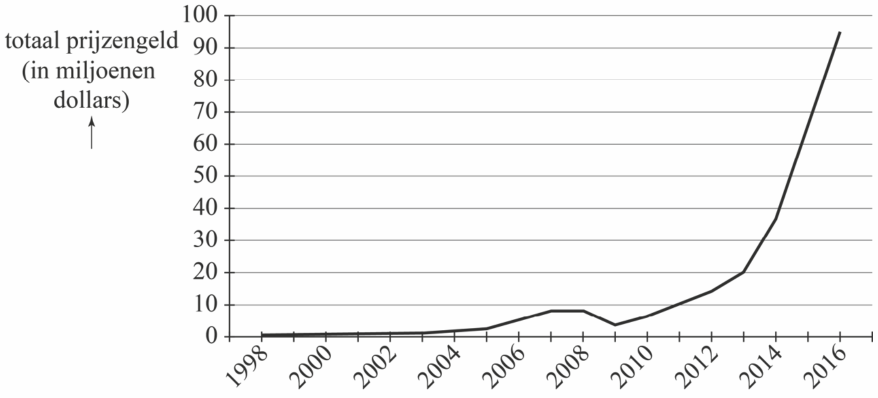
The International

Electronic Sports, afgekort **E-Sports**, is de term die wordt gebruikt voor het competitief spelen van computerspellen. Hoewel het tegen andere spelers spelen van computerspellen al bijna net zo lang bestaat als de spellen zelf, wordt algemeen aangenomen dat E-Sports bestaat sinds 1998. Dat is namelijk het jaar dat er voor het eerst een officieel E-Sports-toernooi gehouden werd waarbij geldprijzen te winnen waren.

In 1998 was er in totaal zo'n 100 000 dollar te verdienen door de spelers. Sinds dat jaar is E-Sports uitgegroeid tot een internationaal fenomeen. In 2016 streden tienduizenden spelers in zo'n honderd verschillende spellen om een totale prijzenpot van ruim 95 miljoen dollar.

In figuur 1 is de ontwikkeling weergegeven van het totale prijzengeld dat in E-Sports omgaat.

figuur 1



De totale prijzenpot nam van 2009 tot en met 2016 toe van 3,7 miljoen tot 95,1 miljoen dollar. Als we ervan uitgaan dat deze groei exponentieel was en ook na 2016 exponentieel doorzet, dan zal het totale prijzengeld binnen enkele jaren tot boven de 1 miljard dollar stijgen.

4p **13** Bereken met behulp van de gegevens uit 2009 en 2016 in welk jaar dat het geval zal zijn.

Bijna de helft van het totale prijzengeld in E-Sports wordt gewonnen door spelers van één bepaald spel. Dit spel wordt gespeeld door twee teams van elk vijf spelers, waarbij elk van de spelers een eigen held bestuurt. De spelers proberen met hulp van door de computer bestuurde troepen het gebied van de tegenstander te veroveren.

Er zijn bij dit spel 112 verschillende helden, die worden onderverdeeld in drie categorieën: er zijn 49 aanvallers, 27 verdedigers en de overige helden zijn ondersteunende helden.

Aan het begin van het spel kiezen de teams volgens een gecompliceerd systeem beurtelings hun helden. Iedere held kan hierbij slechts één keer gekozen worden.

Het is gebruikelijk dat een team bestaat uit twee aanvallers, één verdediger en twee ondersteunende helden.

4p **14** Bereken hoeveel verschillende samenstellingen er mogelijk zijn van twee aanvallers, één verdediger en twee ondersteunende helden.

In elk team zitten vijf helden. Het spelgebied waarop de teams elkaar bestrijden kan globaal worden ingedeeld in drie zones: Noord, Midden en Zuid. Een held kan een rol krijgen in een van deze drie zones. Bovendien bestaat er de mogelijkheid om een held tussen de zones te laten wisselen; we noemen dat een zwervende held. Er zijn dus eigenlijk vier mogelijke rollen voor een held: Noord, Midden, Zuid en zwervend.

Teams kiezen er altijd voor om in elk van de drie zones ten minste één held te plaatsen. Een mogelijke verdeling van de aantallen helden is dan bijvoorbeeld: 1 held in Noord, 1 held in Midden, 2 helden in Zuid en 1 zwervende held. We gaan er hierbij vanuit dat het niet van belang is welke held in welke zone aanwezig is.

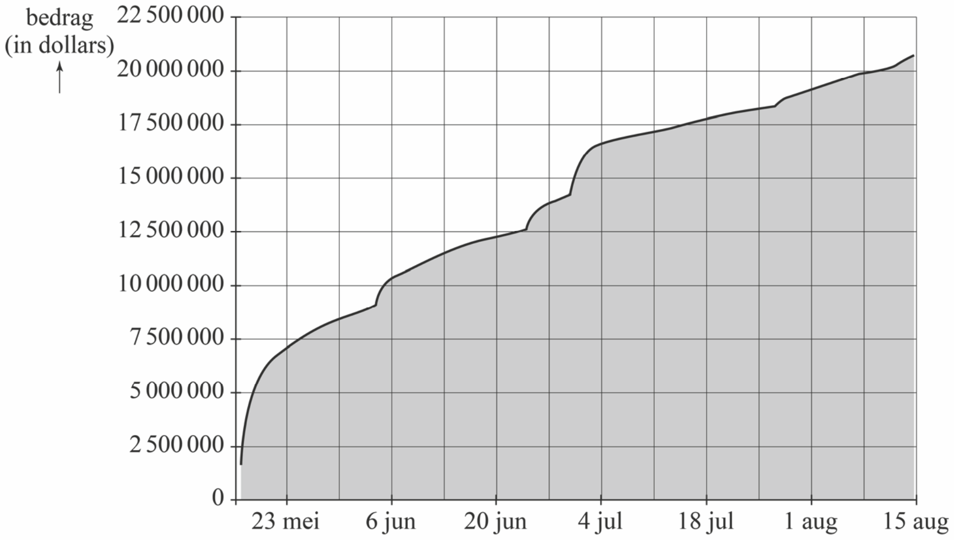
4p **15** Bereken hoeveel van zulke verdelingen er voor één team mogelijk zijn als elk van de zones Noord, Midden en Zuid ten minste één held moet bevatten.

Voor het spel worden gedurende het jaar diverse toernooien met uiteenlopende geldprijzen gehouden, maar het belangrijkste toernooi is The International, dat jaarlijks in augustus gehouden wordt. Teams uit alle delen van de wereld proberen via kwalificatietoernooien een van de zestien deelnamebewijzen te bemachtigen. En met een goede reden: in 2016 was de prijzenpot voor The International ruim 20 miljoen dollar.

Dat het prijzengeld zo hoog is bij The International komt doordat het toernooi crowdfunded is. Dat wil zeggen: spelers van het spel kunnen gedurende een periode voorafgaand aan het toernooi bijdragen aan de prijzenpot.

Het verloop van de hoogte van de prijzenpot voor The International 2016 staat in figuur 2.

figuur 2



De totale prijzenpot voor The International 2016 was als volgt opgebouwd:
- De organisatie van het toernooi, in dit geval de ontwikkelaar van het spel, legde een bepaald startbedrag in de prijzenpot.
- De ontwikkelaar gaf de spelers van het spel vanaf 16 mei de mogelijkheid om virtuele voorwerpen te kopen die zij in het spel konden gebruiken. Van de opbrengsten daarvan werd 25% aan de prijzenpot toegevoegd.

De grafiek in figuur 2 kan redelijk worden benaderd met de volgende formule:

$$P = 8{,}157 \cdot \ln(0{,}1(t+10)) + 1{,}6$$

In deze formule is P het totale prijzengeld in miljoenen dollars en t de tijd in dagen met $t = 0$ op 16 mei 2016.

Volgens een website die verslag doet van E-Sports-toernooien hadden spelers binnen een maand 40 miljoen dollar uitgegeven aan virtuele voorwerpen.

4p **16** Bereken met behulp van de formule voor P na hoeveel hele dagen dat het geval was.

In de grafiek in figuur 2 is goed te zien dat de toename van de totale prijzenpot niet regelmatig verliep. Dat kwam doordat de ontwikkelaar af en toe met speciale acties kwam om spelers te verleiden extra voorwerpen te kopen.

Een van die acties was bijvoorbeeld op 30 juni. Op die dag groeide de prijzenpot met 1,125 miljoen dollar. Dat is een veel sterkere toename dan je op basis van de afgeleide van P mag verwachten.

5p **17** Bereken met behulp van differentiëren hoeveel keer zo groot de toename op 30 juni was dan je op basis van de afgeleide van P had mogen verwachten. Geef je antwoord als een geheel getal.

Huurprijzen in New York

New York is al decennialang een van de populairste steden ter wereld om te wonen met als gevolg dat de gemiddelde prijs van huurwoningen er explosief gestegen is. In 1970 bedroeg de gemiddelde huur van een woning in New York \$ 125 per maand. In 2013 was dat gestegen tot \$ 917 per maand. Dat is een toename van ruim 600%.

Zo'n vergelijking is echter niet helemaal eerlijk, want de waarde van geld verandert ook. Dat heet inflatie. Sinds 1970 bedroeg de gemiddelde inflatie per jaar 3,95%. We gaan ervan uit dat sinds 1970 de huurprijzen, onafhankelijk van andere factoren, jaarlijks door de inflatie 3,95% gestegen zijn.

Door de \$ 125 uit 1970 om te rekenen naar dollars uit 2013 kan je de reële gemiddelde huurstijging berekenen. De reële gemiddelde huurstijging is de procentuele stijging van de gemiddelde huurprijzen boven op de stijging als gevolg van de inflatie.

3p **18** Bereken de reële gemiddelde huurstijging. Geef je antwoord in één decimaal.

In het vervolg van deze opgave zijn alle genoemde bedragen, getallen en percentages berekend met de naar 2013-dollars omgerekende bedragen. Je hoeft dus zelf geen rekening te houden met inflatie.
Verder spreken we in het vervolg van deze opgave over inkomen, huurprijs en huurlast, terwijl daar gemiddeld inkomen, gemiddelde huurprijs en gemiddelde huurlast bedoeld wordt.

Een belangrijke maatstaf om de betaalbaarheid van huurwoningen te onderzoeken is het percentage van het inkomen dat besteed wordt aan het betalen van de huur: de **huurlast**.

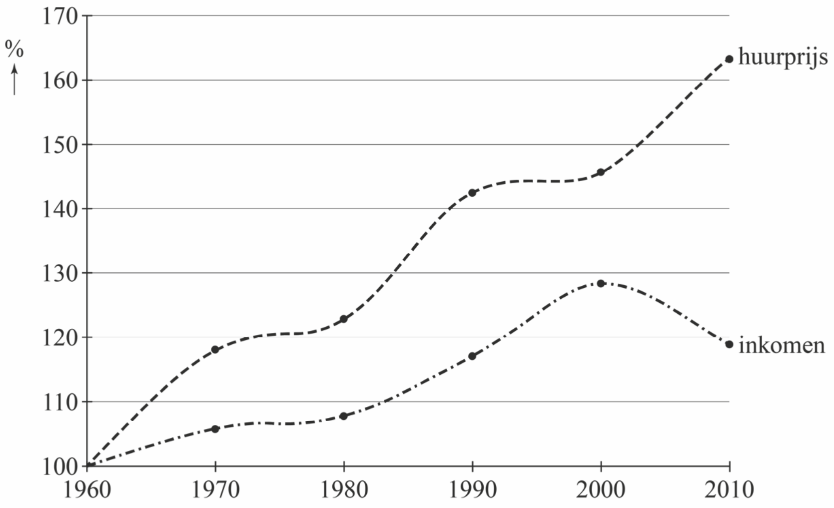
In 1960 bedroeg de huurprijs in New York \$ 561 en was de huurlast 15%.

Doordat de huurprijzen sneller stijgen dan de inkomens, neemt de huurlast steeds verder toe: van 15% in 1960 tot 21% in 2013. Een econoom beweert dat er zich grote problemen zullen gaan voordoen als de huurlast boven de 25% uitkomt. De econoom gaat ervan uit dat de huurlast exponentieel is toegenomen sinds 1960 en dat die exponentiële stijging zich ook na 2013 voortzet.

4p **19** Bereken in welk jaar de huurlast volgens deze veronderstelling voor het eerst groter is dan 25%.

In de figuur hieronder is het werkelijke verloop van de huurprijs in New York en van het inkomen van zijn inwoners als percentage van de bedragen in 1960 uitgezet tegen de tijd.

figuur



Hieronder staan twee uitspraken die gaan over de gegevens in de figuur:

1 In de periode 1960–1980 steeg de huurprijs sneller dan in de periode 1980–2000.
2 In de periode 1990–2000 daalde de huurlast.

4p **20** Leg voor elk van deze uitspraken uit of deze waar is of niet.

Inkomensongelijkheid

Het **primair inkomen** van een huishouden bestaat uit de som van alle bruto inkomens uit werk en vermogen van alle personen uit dat huishouden. Als in een huishouden niemand betaald werk heeft of over vermogen beschikt, dan is het primair inkomen van dit huishouden gelijk aan nul.

Het totale primair inkomen van alle huishoudens in Nederland in 2014 was 376,3 miljard euro. Er waren toen in totaal 7,8 miljoen huishoudens en 16,7 miljoen personen.

In de tabel zijn alle huishoudens op basis van hun primair inkomen gerangschikt en verdeeld in tien groepen die elk ongeveer evenveel huishoudens bevatten. De eerste groep bevat de huishoudens met de laagste primaire inkomens en de tiende groep bevat die met de hoogste primaire inkomens.

tabel

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
aandeel primair inkomen (%)	0	0	1	3	5	8	12	16	20	35
aantal huishoudens (x 1000)	784	769	776	777	777	777	777	777	777	776
aantal personen (x 1000)	1138	1041	1234	1330	1466	1597	1851	2155	2381	2535

In de tabel kun je bijvoorbeeld zien dat de groep met de hoogste primaire inkomens 776 000 huishoudens bevat en uit 2 535 000 personen bestaat. Van het totale primair inkomen van 376,3 miljard euro is 35% van deze groep. Dit is 131,705 miljard euro.

De mate van inkomensongelijkheid tussen personen wordt weergegeven door S. We definiëren S als volgt:
S is het gemiddeld inkomen **per persoon** in de tiende groep min het gemiddeld inkomen **per persoon** in de eerste groep.

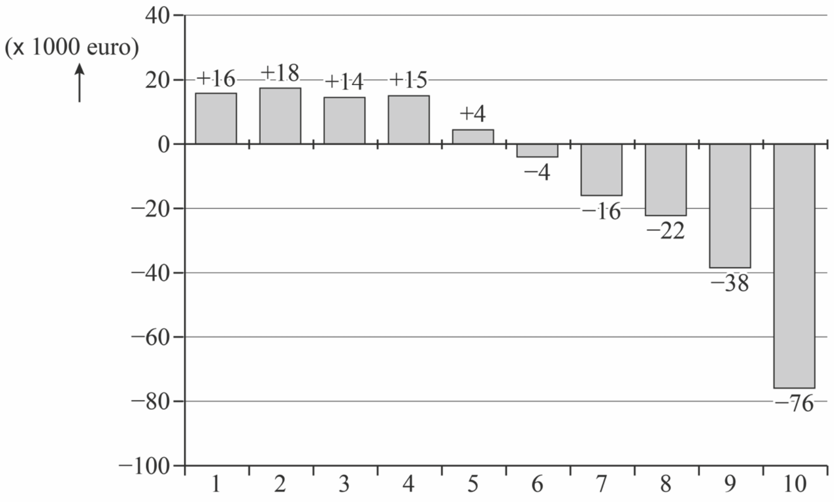
Je kunt met de bovenstaande gegevens berekenen dat S bij het primair inkomen ongeveer 51 955 euro is.

Door uitkeringen te geven en belastingen te heffen, verkleint de Nederlandse overheid de inkomensongelijkheid.
Als we bij het primair inkomen van een huishouden alle ontvangen uitkeringen optellen en alle betaalde belastingen eraf halen, krijgen we het **secundair inkomen** van het huishouden.

In de figuur staat voor dezelfde tien groepen huishoudens als in de tabel het verschil tussen het secundair en primair inkomen per huishouden.

figuur

secundair inkomen min primair inkomen per huishouden



In de figuur kun je bijvoorbeeld zien dat het secundair inkomen per huishouden in de eerste vijf groepen hoger is dan het primair inkomen. Er is dan een hoger bedrag aan uitkeringen ontvangen dan er aan belasting is betaald.

Door de uitkeringen en belastingen zal S bij het secundair inkomen kleiner zijn dan bij het primair inkomen.

7p **21** Onderzoek of S in 2014 bij het secundair inkomen meer of minder dan 30 000 euro lager is dan bij het primair inkomen.

Bijlagen

Cijferbepaling

2017-I

punten	cijfer	punten	cijfer
0	**1,0**	46	**7,0**
1	**1,2**	47	**7,1**
2	**1,4**	48	**7,2**
3	**1,6**	49	**7,4**
4	**1,9**	50	**7,5**
5	**2,1**	51	**7,6**
6	**2,3**	52	**7,7**
7	**2,5**	53	**7,8**
8	**2,7**	54	**7,9**
9	**2,9**	55	**8,0**
10	**3,1**	56	**8,1**
11	**3,3**	57	**8,2**
12	**3,4**	58	**8,3**
13	**3,5**	59	**8,4**
14	**3,6**	60	**8,5**
15	**3,7**	61	**8,6**
16	**3,8**	62	**8,7**
17	**3,9**	63	**8,9**
18	**4,0**	64	**8,9**
19	**4,1**	65	**9,0**
20	**4,2**	66	**9,0**
21	**4,4**	67	**9,1**
22	**4,5**	68	**9,1**
23	**4,6**	69	**9,2**
24	**4,7**	70	**9,3**
25	**4,8**	71	**9,3**
26	**4,9**	72	**9,4**
27	**5,0**	73	**9,4**
28	**5,1**	74	**9,5**
29	**5,2**	75	**9,5**
30	**5,3**	76	**9,6**
31	**5,4**	77	**9,6**
32	**5,5**	78	**9,7**
33	**5,6**	79	**9,7**
34	**5,7**	80	**9,8**
35	**5,9**	81	**9,8**
36	**6,0**	82	**9,9**
37	**6,1**	83	**9,9**
38	**6,2**	84	**10,0**
39	**6,3**		
40	**6,4**		
41	**6,5**		
42	**6,6**		
43	**6,7**		
44	**6,8**		
45	**6,9**		

2017-II

punten	cijfer	punten	cijfer
0	**1,0**	46	**7,1**
1	**1,2**	47	**7,3**
2	**1,4**	48	**7,4**
3	**1,7**	49	**7,5**
4	**1,9**	50	**7,6**
5	**2,1**	51	**7,7**
6	**2,3**	52	**7,8**
7	**2,5**	53	**7,9**
8	**2,8**	54	**8,0**
9	**3,0**	55	**8,1**
10	**3,2**	56	**8,2**
11	**3,3**	57	**8,4**
12	**3,4**	58	**8,5**
13	**3,5**	59	**8,6**
14	**3,6**	60	**8,7**
15	**3,7**	61	**8,8**
16	**3,9**	62	**8,9**
17	**4,0**	63	**9,0**
18	**4,1**	64	**9,0**
19	**4,2**	65	**9,1**
20	**4,3**	66	**9,1**
21	**4,4**	67	**9,2**
22	**4,5**	68	**9,2**
23	**4,6**	69	**9,3**
24	**4,7**	70	**9,3**
25	**4,8**	71	**9,4**
26	**5,0**	72	**9,5**
27	**5,1**	73	**9,5**
28	**5,2**	74	**9,6**
29	**5,3**	75	**9,6**
30	**5,4**	76	**9,7**
31	**5,5**	77	**9,7**
32	**5,6**	78	**9,8**
33	**5,7**	79	**9,8**
34	**5,8**	80	**9,9**
35	**5,9**	81	**9,9**
36	**6,1**	82	**10,0**
37	**6,2**		
38	**6,3**		
39	**6,4**		
40	**6,5**		
41	**6,6**		
42	**6,7**		
43	**6,8**		
44	**6,9**		
45	**7,0**		

2018-I

punten	cijfer	punten	cijfer
0	**1,0**	46	**5,9**
1	**1,1**	47	**6,0**
2	**1,1**	48	**6,1**
3	**1,2**	49	**6,3**
4	**1,2**	50	**6,4**
5	**1,3**	51	**6,5**
6	**1,3**	52	**6,6**
7	**1,4**	53	**6,7**
8	**1,5**	54	**6,8**
9	**1,6**	55	**6,9**
10	**1,8**	56	**7,1**
11	**1,9**	57	**7,2**
12	**2,0**	58	**7,3**
13	**2,1**	59	**7,4**
14	**2,2**	60	**7,5**
15	**2,3**	61	**7,6**
16	**2,4**	62	**7,8**
17	**2,6**	63	**7,9**
18	**2,7**	64	**8,0**
19	**2,8**	65	**8,1**
20	**2,9**	66	**8,2**
21	**3,0**	67	**8,3**
22	**3,1**	68	**8,4**
23	**3,3**	69	**8,6**
24	**3,4**	70	**8,7**
25	**3,5**	71	**8,8**
26	**3,6**	72	**8,9**
27	**3,7**	73	**9,0**
28	**3,8**	74	**9,1**
29	**3,9**	75	**9,3**
30	**4,1**	76	**9,5**
31	**4,2**	77	**9,8**
32	**4,3**	78	**10,0**
33	**4,4**		
34	**4,5**		
35	**4,6**		
36	**4,8**		
37	**4,9**		
38	**5,0**		
39	**5,1**		
40	**5,2**		
41	**5,3**		
42	**5,4**		
43	**5,6**		
44	**5,7**		
45	**5,8**		

Bedenk dat het toekennen van punten aan een antwoord enige deskundigheid vereist. De hier behaalde scores zijn dus vooral een indicatie van hoeveel je op dit moment weet over het vak.

2018-II

punten	cijfer	punten	cijfer
0	**1,0**	46	**5,8**
1	**1,1**	47	**5,9**
2	**1,1**	48	**6,0**
3	**1,2**	49	**6,1**
4	**1,2**	50	**6,2**
5	**1,3**	51	**6,3**
6	**1,3**	52	**6,5**
7	**1,4**	53	**6,6**
8	**1,5**	54	**6,7**
9	**1,6**	55	**6,8**
10	**1,7**	56	**6,9**
11	**1,8**	57	**7,0**
12	**2,0**	58	**7,1**
13	**2,1**	59	**7,2**
14	**2,2**	60	**7,4**
15	**2,3**	61	**7,5**
16	**2,4**	62	**7,6**
17	**2,5**	63	**7,7**
18	**2,6**	64	**7,8**
19	**2,7**	65	**7,9**
20	**2,9**	66	**8,0**
21	**3,0**	67	**8,1**
22	**3,1**	68	**8,3**
23	**3,2**	69	**8,4**
24	**3,3**	70	**8,5**
25	**3,4**	71	**8,6**
26	**3,5**	72	**8,7**
27	**3,6**	73	**8,8**
28	**3,8**	74	**8,9**
29	**3,9**	75	**9,0**
30	**4,0**	76	**9,2**
31	**4,1**	77	**9,3**
32	**4,2**	78	**9,6**
33	**4,3**	79	**9,8**
34	**4,4**	80	**10,0**
35	**4,5**		
36	**4,7**		
37	**4,8**		
38	**4,9**		
39	**5,0**		
40	**5,1**		
41	**5,2**		
42	**5,3**		
43	**5,4**		
44	**5,6**		
45	**5,7**		

2019-I

punten	cijfer	punten	cijfer
0	**1,0**	46	**6,4**
1	**1,2**	47	**6,6**
2	**1,4**	48	**6,7**
3	**1,5**	49	**6,8**
4	**1,7**	50	**6,9**
5	**1,8**	51	**7,0**
6	**1,9**	52	**7,1**
7	**2,0**	53	**7,2**
8	**2,1**	54	**7,4**
9	**2,2**	55	**7,5**
10	**2,3**	56	**7,6**
11	**2,5**	57	**7,7**
12	**2,6**	58	**7,8**
13	**2,7**	59	**7,9**
14	**2,8**	60	**8,0**
15	**2,9**	61	**8,1**
16	**3,0**	62	**8,3**
17	**3,1**	63	**8,4**
18	**3,3**	64	**8,5**
19	**3,4**	65	**8,6**
20	**3,5**	66	**8,7**
21	**3,6**	67	**8,8**
22	**3,7**	68	**8,9**
23	**3,8**	69	**9,1**
24	**3,9**	70	**9,2**
25	**4,0**	71	**9,3**
26	**4,2**	72	**9,4**
27	**4,3**	73	**9,5**
28	**4,4**	74	**9,6**
29	**4,5**	75	**9,7**
30	**4,6**	76	**9,8**
31	**4,7**	77	**9,9**
32	**4,8**	78	**9,9**
33	**5,0**	79	**10,0**
34	**5,1**		
35	**5,2**		
36	**5,3**		
37	**5,4**		
38	**5,5**		
39	**5,6**		
40	**5,8**		
41	**5,9**		
42	**6,0**		
43	**6,1**		
44	**6,2**		
45	**6,3**		

2019-II

punten	cijfer	punten	cijfer
0	**1,0**	46	**6,4**
1	**1,2**	47	**6,5**
2	**1,4**	48	**6,6**
3	**1,7**	49	**6,7**
4	**1,8**	50	**6,8**
5	**1,9**	51	**6,9**
6	**2,1**	52	**7,0**
7	**2,2**	53	**7,1**
8	**2,3**	54	**7,3**
9	**2,4**	55	**7,4**
10	**2,5**	56	**7,5**
11	**2,6**	57	**7,6**
12	**2,7**	58	**7,7**
13	**2,8**	59	**7,8**
14	**2,9**	60	**7,9**
15	**3,0**	61	**8,0**
16	**3,1**	62	**8,1**
17	**3,2**	63	**8,2**
18	**3,4**	64	**8,3**
19	**3,5**	65	**8,4**
20	**3,6**	66	**8,6**
21	**3,7**	67	**8,7**
22	**3,8**	68	**8,8**
23	**3,9**	69	**8,9**
24	**4,0**	70	**9,0**
25	**4,1**	71	**9,1**
26	**4,2**	72	**9,2**
27	**4,3**	73	**9,3**
28	**4,4**	74	**9,4**
29	**4,5**	75	**9,5**
30	**4,7**	76	**9,6**
31	**4,8**	77	**9,7**
32	**4,9**	78	**9,7**
33	**5,0**	79	**9,8**
34	**5,1**	80	**9,8**
35	**5,2**	81	**9,9**
36	**5,3**	82	**9,9**
37	**5,4**	83	**10,0**
38	**5,5**		
39	**5,6**		
40	**5,7**		
41	**5,8**		
42	**6,0**		
43	**6,1**		
44	**6,2**		
45	**6,3**		

Onderwerpregister

onderwerp	deel 1 hoofdstuk **onderdeel**	deel 2a examen **onderdeel**
a		
afgeleide functie: zie differentiëren		
algebra	h1 **alles** h3 **3 9 10 14** h5 **10** h7 **9**	2017-I **9 13** 2017-II **10** 2018-I **2** 2018-II **13 16** 2019-I **13 18** 2019-II **10 15**
d		
differentiequotiënt	h6 **7**	2018-II **3** 2019-I **1 14** 2019-II **2**
differentiëren	h3 **2 6 9 22 31 49** h4a **24 37** h6 **3 16 21** h7 **2 3 4 6 8-12 14 16 21**	2017-I **3 7** 2017-II **3 7** 2018-I **10** 2018-II **8 12 17** 2019-I **5 12 16** 2019-II **7 8**
e		
evenredig	h1 **30-33** h3 **34** h4a **25**	2017-I **11 12** 2017-II **2** 2019-II **17-20**
exponentiële functie	h1 **13 20** h3 **40 41** h4a **2 3 9 10 18-20 21-25 26-30 31-35 36-38 48** h6 **1-5 18 19** h7 **5 6 13 14 16**	2017-I **1 8 9** 2017-II **8-10 17-20 21** 2018-I **8-11** 2018-II **1-4** 2019-I **16-19** 2019-II **6-10**
f		
formule omwerken	h3 **3 24 46 53** h6 **5**	2017-I **9** 2017-II **4 10** 2018-I **3 11** 2018-II **4 20** 2019-I **19**
g		
gebroken functie	h1 **15 21-23 27** h3 **18-22 23-27 44-46** h7 **4 5 13 14**	2017-I **3 4 6 7** 2017-II **6 7 17-20** 2018-II **14-17** 2019-I **3-5** 2019-II **17-19**
groeifactor	h4a **1 8 28 29 31 45 48 49** h7 **12 15**	2017-I **1** 2017-II **9** 2018-I **18** 2018-II **2**

onderwerp	deel 1 hoofdstuk **onderdeel**	deel 2a examen **onderdeel**
h		
helling	h1 **1-3** h4b **4 8 10** h6 **3 4 7-10 14 16 17 21** h7 **10 21** h8 **3 4**	2018-I **1 16 19** 2018-II **3** 2019-I **2 3**
k		
kettingregel	h4a **24 37** h6 **3** h7 **3 6 10 11 21**	2018-I **10** 2018-II **8** 2019-I **16** 2019-II **8**
kwadratisch verband	h1 **7 8 25 32** h3 **1-3 11-13 37-41**	2018-I **3** 2019-II **4 5**
l		
lineair verband	h1 **1-6** h3 **11-13** h4a **9 35 41** h5 **12 13** h8 **1 3**	2017-I **21** 2017-II **21** 2018-I **1 2 7 19 21** 2019-I **1-3 8** 2019-II **2**
logaritmisch verband/ logpapier	h1 **14 16 19 26 29** h4a **4-6 11-13 14 21-23 33 34 41 42** h7 **10 11 15-22**	2017-I **8 9** 2017-II **1 2 4** 2018-I **4-6** 2018-II **11-13** 2019-II **20**
m		
machtsfunctie	h1 **7-12 18 24 28 33** h3 **5 6 8-10 14 18-22 28-31 32-34 47-49 52 53** h4a **15-17** h5 **10 11** h6 **6-10 16 20 21** h7 **1-3 8 9**	2017-I **13** 2017-II **3 4** 2018-II **21** 2019-I **10-12**
o		
onderzoeksvraag	h8 **alle**	2017-I **21** 2017-II **21** 2018-I **21** 2018-II **22** 2019-I **20** 2019-II **21**
p		
productregel		2018-II **8**

onderwerp	deel 1 hoofdstuk **onderdeel**	deel 2a examen **onderdeel**
q		
quotiëntregel	h7 **4 14**	2017-I **3** 2017-II **7** 2018-II **17** 2019-I **5** 2019-II **8**
r		
richtingscoëfficiënt: zie helling		
rijen	h3 **37-41** h5 **2 3-6 9 10 14 15 16 17**	2017-I **18-20** 2017-II **11 12** 2018-I **8 20**
recursieve formules		2018-II **7** 2019-I **9** 2019-II **15 16**
s		
sinusfunctie	h4b **alles**	2017-I **15-17** 2017-II **13 14** 2018-I **12-16** 2019-I **20** 2019-II **21**
t		
telproblemen	h2 **alles** h4a **40** h5 **1 7 8**	2017-II **15 16** 2018-I **17** 2018-II **5 6 10** 2019-I **6 7** 2019-II **12-14**
v		
veranderingen/ toenamen(diagram)	h4a **7** h6 **2 11 12 13 15 20**	2017-I **3 7** 2017-II **7 18** 2018-I **10 15** 2018-II **3 9 12 17** 2019-I **4 5 14** 2019-II **2 3**

Lijst van formules die in het examen wordt opgenomen

De volgende lijst formules wordt afgedrukt op bladzijde 2 van het examen.

Differentiëren

naam van de regel	functie	afgeleide
somregel	$s(x)=f(x)+g(x)$	$s'(x)=f'(x)+g'(x)$
verschilregel	$s(x)=f(x)-g(x)$	$s'(x)=f'(x)-g'(x)$
productregel	$p(x)=f(x)\cdot g(x)$	$p'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
quotiëntregel	$q(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
kettingregel	$k(x)=f(g(x))$	$k'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$ of $\dfrac{dk}{dx}=\dfrac{df}{dg}\cdot\dfrac{dg}{dx}$

Logaritmen

regel	voorwaarde
${}^{g}\log(a)+{}^{g}\log(b)={}^{g}\log(a\cdot b)$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^{g}\log(a)-{}^{g}\log(b)={}^{g}\log(\frac{a}{b})$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ b>0$
${}^{g}\log(a^{p})=p\cdot{}^{g}\log(a)$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0$
${}^{g}\log(a)=\dfrac{{}^{p}\log(a)}{{}^{p}\log(g)}$	$g>0,\ g\neq 1,\ a>0,\ p>0,\ p\neq 1$

Examenwerkwoorden

In onderstaande lijst staan de relevante examenwerkwoorden voor wiskunde. Als in een wiskunde examen een van de woorden uit onderstaande lijst wordt gebruikt, geldt de betekenis die hiervan in deze lijst is gegeven. Deze lijst met examenwerkwoorden is niet uitputtend.

	Algemeen: Tenzij anders aangegeven, is de wijze waarop het antwoord gevonden wordt vrij.
	Alleen voor wiskunde B geldt: de toevoeging 'algebraïsch' of 'exact' legt beperkingen op aan de wijze van beantwoorden.
Algebraïsch / op algebraïsche wijze *(alleen wiskunde B)*	Zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine; tussenantwoorden en het eindantwoord mogen benaderd opgeschreven worden.
Exact / op exacte wijze *(alleen wiskunde B)*	Zonder gebruik te maken van specifieke opties* van de grafische rekenmachine; tussenantwoorden en het eindantwoord mogen niet benaderd opgeschreven worden. ------ **Als bijvoorbeeld gevraagd wordt de ongelijkheid $5/x < x$ exact op te lossen, wordt verwacht dat de gelijkheid $5/x = x$ exact wordt opgelost. De tekens in de oplossing van de ongelijkheid hoeven niet verantwoord te worden.*
Aantonen dat, laten zien dat	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet
Afleiden van bijvoorbeeld een formule of een eenheid	Het geven van een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van de formule of eenheid volgt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. Tenzij anders aangegeven, geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
Bepalen	Het gevraagde vaststellen en/of uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Beredeneren, uitleggen	Het geven van een uitwerking waarin de denkstappen staan, waaruit het gestelde/gevraagde blijkt.
Berekenen	Het gevraagde uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Bewijzen (dat) *(alleen wiskunde B)*	Het geven van een redenering en/of exacte berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. Het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden voldoet niet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt
Herleiden (van een formule)	Een formule stap voor stap herschrijven tot deze in de gevraagde vorm staat, zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine.

©ThiemeMeulenhoff

Noemen, (aan)geven wat, welke, wanneer, hoeveel	Een eindantwoord geven. Een toelichting is niet vereist tenzij anders is aangegeven.
Onderzoeken of	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de (on)juistheid van het gestelde blijkt. Het antwoord moet worden afgesloten met een conclusie. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt.
Oplossen	Het bepalen van de waarden van een of meer onbekenden die voldoen aan de gegeven vergelijking of ongelijkheid. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Schetsen	Het geven van een grafische voorstelling die de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen bevat.
Tekenen	Het geven van een grafische voorstelling die de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen bevat en voldoende nauwkeurig is. In het geval van een grafiek moet een assenstelsel met schaalverdeling zijn weergegeven.

©ThiemeMeulenhoff

Afrondregels bij het examen wiskunde A

Afronden van tussenantwoorden

a. *Als bij een vraag doorgerekend wordt met tussenantwoorden die afgerond zijn, en dit leidt tot een ander eindantwoord dan wanneer doorgerekend is met niet-afgeronde tussenantwoorden, wordt bij de betreffende vraag één scorepunt in mindering gebracht. Tussenantwoorden mogen wel afgerond genoteerd worden.*

b. *Uitzondering zijn die gevallen waarin door de context wordt bepaald dat tussenantwoorden moeten worden afgerond.*

c. *(alleen voor wiskunde A en C) De aftrek voor fouten zoals bedoeld onder a. en/of fouten bij het afronden van het eindantwoord bedraagt voor het hele examen maximaal 2 scorepunten.*

Afronden van groeifactoren en kansen

d. *Als een groeifactor of kans wordt gevraagd, geldt voor het eindantwoord: groeifactoren moeten worden genoteerd in ten minste twee decimalen en kansen moeten worden genoteerd in ten minste twee decimalen of hele procenten.*
Meer decimalen zijn vereist als het nodig is om af te wijken van 0 of 1.

©ThiemeMeulenhoff

Aantekeningen

©ThiemeMeulenhoff

Aantekeningen

©ThiemeMeulenhoff

Aantekeningen

©ThiemeMeulenhoff

Colofon

Auteur
H.R. Goede

Vormgeving binnenwerk
Maura van Wermeskerken, Apeldoorn

Opmaak
Crius Group, Hulshout

Redactie
Lineke Pijnappels, Tilburg

Auteur stappenplan
T.H.J. Heutmekers

Over ThiemeMeulenhoff
ThiemeMeulenhoff ontwikkelt zich van educatieve uitgeverij tot een learning design company. We brengen content, leerontwerp en technologie samen. Met onze groeiende expertise, ervaring en leeroplossingen zijn we een partner voor scholen bij het vernieuwen en verbeteren van onderwijs.
Zo kunnen we samen beter recht doen aan de verschillen tussen lerenden en scholen en ervoor zorgen dat leren steeds persoonlijker, effectiever en efficiënter wordt.

Samen leren vernieuwen.

www.thiememeulenhoff.nl

ISBN 978 90 06 49160 9
Eerste druk, derde oplage, 2022

© ThiemeMeulenhoff, Amersfoort, 2021

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of enig andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Voor zover het maken van kopieën uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16B Auteurswet 1912 j° het Besluit van 23 augustus 1985, Stbl. 471 en artikel 17 Auteurswet 1912, dient men de daarvoor wettelijk verschuldigde vergoedingen te voldoen aan Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie (PRO), Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp (www.stichting-pro.nl). Voor het overnemen van gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet) dient men zich tot de uitgever te wenden. Voor meer informatie over het gebruik van muziek, film en het maken van kopieën in het onderwijs zie www.auteursrechtenonderwijs.nl.

De uitgever heeft ernaar gestreefd de auteursrechten te regelen volgens de wettelijke bepalingen. Degenen die desondanks menen zekere rechten te kunnen doen gelden, kunnen zich alsnog tot de uitgever wenden.

Deze uitgave is volledig CO_2-neutraal geproduceerd.
Het voor deze uitgave gebruikte papier is voorzien van het FSC®-keurmerk.
Dit betekent dat de bosbouw op een verantwoorde wijze heeft plaatsgevonden.

examenbundel ›

vwo **Nederlands**
vwo **Engels**
vwo **Duits**
vwo **Frans**
vwo **Economie**
vwo **Bedrijfseconomie**
vwo **Maatschappijwetenschappen**
vwo **Geschiedenis**
vwo **Aardrijkskunde**
vwo **Wiskunde A**
vwo **Wiskunde B**
vwo **Wiskunde C**
vwo **Scheikunde**
vwo **Biologie**
vwo **Natuurkunde**

samengevat }

vwo **Economie**
vwo **Bedrijfseconomie**
vwo **Maatschappijwetenschappen**
vwo **Geschiedenis**
vwo **Aardrijkskunde**
vwo **Wiskunde A**
vwo **Wiskunde B**
vwo **Wiskunde C**
vwo **Scheikunde**
vwo **Biologie**
vwo **Natuurkunde**
havo/vwo **Nederlands 3F/4F**
havo/vwo **Rekenen 3F**

Tips, tricks en informatie die jou helpen bij het slagen voor je eindexamen vind je op examenbundel.nl! Nog meer kans op slagen? Volg ons ook op social media. #geenexamenstress

examenidioom + examenbundel + samengevat + zeker slagen! = #geenexamenstress

examenidioom

vwo **Engels**
vwo **Duits**
vwo **Frans**

zeker slagen !

voor vmbo, havo én vwo

9 789006 491609